This is a digital copy of a book that was preserved for generations on library shelves before it was carefully scanned by Google as part of a project to make the world's books discoverable online.

It has survived long enough for the copyright to expire and the book to enter the public domain. A public domain book is one that was never subject to copyright or whose legal copyright term has expired. Whether a book is in the public domain may vary country to country. Public domain books are our gateways to the past, representing a wealth of history, culture and knowledge that's often difficult to discover.

Marks, notations and other marginalia present in the original volume will appear in this file - a reminder of this book's long journey from the publisher to a library and finally to you.

Usage guidelines

Google is proud to partner with libraries to digitize public domain materials and make them widely accessible. Public domain books belong to the public and we are merely their custodians. Nevertheless, this work is expensive, so in order to keep providing this resource, we have taken steps to prevent abuse by commercial parties, including placing technical restrictions on automated querying.

We also ask that you:

+ *Make non-commercial use of the files* We designed Google Book Search for use by individuals, and we request that you use these files for personal, non-commercial purposes.

+ *Refrain from automated querying* Do not send automated queries of any sort to Google's system: If you are conducting research on machine translation, optical character recognition or other areas where access to a large amount of text is helpful, please contact us. We encourage the use of public domain materials for these purposes and may be able to help.

+ *Maintain attribution* The Google "watermark" you see on each file is essential for informing people about this project and helping them find additional materials through Google Book Search. Please do not remove it.

+ *Keep it legal* Whatever your use, remember that you are responsible for ensuring that what you are doing is legal. Do not assume that just because we believe a book is in the public domain for users in the United States, that the work is also in the public domain for users in other countries. Whether a book is still in copyright varies from country to country, and we can't offer guidance on whether any specific use of any specific book is allowed. Please do not assume that a book's appearance in Google Book Search means it can be used in any manner anywhere in the world. Copyright infringement liability can be quite severe.

About Google Book Search

Google's mission is to organize the world's information and to make it universally accessible and useful. Google Book Search helps readers discover the world's books while helping authors and publishers reach new audiences. You can search through the full text of this book on the web at `http://books.google.com/`

Über dieses Buch

Dies ist ein digitales Exemplar eines Buches, das seit Generationen in den Regalen der Bibliotheken aufbewahrt wurde, bevor es von Google im Rahmen eines Projekts, mit dem die Bücher dieser Welt online verfügbar gemacht werden sollen, sorgfältig gescannt wurde.

Das Buch hat das Urheberrecht überdauert und kann nun öffentlich zugänglich gemacht werden. Ein öffentlich zugängliches Buch ist ein Buch, das niemals Urheberrechten unterlag oder bei dem die Schutzfrist des Urheberrechts abgelaufen ist. Ob ein Buch öffentlich zugänglich ist, kann von Land zu Land unterschiedlich sein. Öffentlich zugängliche Bücher sind unser Tor zur Vergangenheit und stellen ein geschichtliches, kulturelles und wissenschaftliches Vermögen dar, das häufig nur schwierig zu entdecken ist.

Gebrauchsspuren, Anmerkungen und andere Randbemerkungen, die im Originalband enthalten sind, finden sich auch in dieser Datei – eine Erinnerung an die lange Reise, die das Buch vom Verleger zu einer Bibliothek und weiter zu Ihnen hinter sich gebracht hat.

Nutzungsrichtlinien

Google ist stolz, mit Bibliotheken in partnerschaftlicher Zusammenarbeit öffentlich zugängliches Material zu digitalisieren und einer breiten Masse zugänglich zu machen. Öffentlich zugängliche Bücher gehören der Öffentlichkeit, und wir sind nur ihre Hüter. Nichtsdestotrotz ist diese Arbeit kostspielig. Um diese Ressource weiterhin zur Verfügung stellen zu können, haben wir Schritte unternommen, um den Missbrauch durch kommerzielle Parteien zu verhindern. Dazu gehören technische Einschränkungen für automatisierte Abfragen.

Wir bitten Sie um Einhaltung folgender Richtlinien:

+ *Nutzung der Dateien zu nichtkommerziellen Zwecken* Wir haben Google Buchsuche für Endanwender konzipiert und möchten, dass Sie diese Dateien nur für persönliche, nichtkommerzielle Zwecke verwenden.

+ *Keine automatisierten Abfragen* Senden Sie keine automatisierten Abfragen irgendwelcher Art an das Google-System. Wenn Sie Recherchen über maschinelle Übersetzung, optische Zeichenerkennung oder andere Bereiche durchführen, in denen der Zugang zu Text in großen Mengen nützlich ist, wenden Sie sich bitte an uns. Wir fördern die Nutzung des öffentlich zugänglichen Materials für diese Zwecke und können Ihnen unter Umständen helfen.

+ *Beibehaltung von Google-Markenelementen* Das "Wasserzeichen" von Google, das Sie in jeder Datei finden, ist wichtig zur Information über dieses Projekt und hilft den Anwendern weiteres Material über Google Buchsuche zu finden. Bitte entfernen Sie das Wasserzeichen nicht.

+ *Bewegen Sie sich innerhalb der Legalität* Unabhängig von Ihrem Verwendungszweck müssen Sie sich Ihrer Verantwortung bewusst sein, sicherzustellen, dass Ihre Nutzung legal ist. Gehen Sie nicht davon aus, dass ein Buch, das nach unserem Dafürhalten für Nutzer in den USA öffentlich zugänglich ist, auch für Nutzer in anderen Ländern öffentlich zugänglich ist. Ob ein Buch noch dem Urheberrecht unterliegt, ist von Land zu Land verschieden. Wir können keine Beratung leisten, ob eine bestimmte Nutzung eines bestimmten Buches gesetzlich zulässig ist. Gehen Sie nicht davon aus, dass das Erscheinen eines Buchs in Google Buchsuche bedeutet, dass es in jeder Form und überall auf der Welt verwendet werden kann. Eine Urheberrechtsverletzung kann schwerwiegende Folgen haben.

Über Google Buchsuche

Das Ziel von Google besteht darin, die weltweiten Informationen zu organisieren und allgemein nutzbar und zugänglich zu machen. Google Buchsuche hilft Lesern dabei, die Bücher dieser Welt zu entdecken, und unterstützt Autoren und Verleger dabei, neue Zielgruppen zu erreichen. Den gesamten Buchtext können Sie im Internet unter `http://books.google.com` durchsuchen.

BOSTON
MEDICAL LIBRARY

IN THE
Francis A. Countway
Library of Medicine
BOSTON

3. Ges. 113

Mitteilungen

der

Naturforschenden Gesellschaft

in Bern

aus dem Jahre 1902.

Nr. 1519-1550.

Redaktion: J. H. GRAF.

BERN
Druck und Verlag von K. J. Wyss
1903

Verlag von K. J. WYSS in Bern.

Bibliographie der schweizerischen Landeskunde.

Unter Mitwirkung der hohen Bundesbehörden, eidgen. und kant. Amtsstellen und zahlreicher Gelehrter
herausgegeben von der
Centralkommission für schweizerische Landeskunde.

In deutscher und französischer Ausgabe.

Bis jetzt erschienen :

Fascikel Ia: *Bibliographische Vorarbeiten der landeskundlichen Litteratur und Kataloge der Bibliotheken der Schweiz.* Zusammengestellt von Prof. Dr. J. H. Graf. Bern 1894. 69 Seiten 8°. Preis Fr. 1.—

Fascikel I b, enthaltend: *Bibliographie der Gesellschaftsschriften, Zeitungen und Kalender der Schweiz,* von Prof. J. L. Brandstetter in Luzern. 380 Seiten. Preis Fr. 3.—

Fascikel II a: *Landesvermessung und Karten der Schweiz, ihrer Landstriche und Kantone.* Herausgegeben vom eidgen. topographischen Bureau. Redigirt von Prof. Dr. J. H. Graf. Bern 1892. 193 Seiten 8°. Preis Fr. 3.—

Fascikel II b: *Karten kleinerer Gebiete der Schweiz.* Herausgegeben vom eidg. topograph. Bureau. Redigirt von Prof. Dr. J. H. Graf, Bern 1892. 164 Seiten 8°. Preis Fr. 3.—

Fascikel II c: *Stadt- und Ortschaftspläne, Reliefs und Panoramen der Schweiz.* Herausgegeben vom eidg. topograph. Bureau. Redigirt von Prof. Dr. J. H. Graf. Bern 1893. 173 Seiten 8°. Preis Fr. 3.—

Fascikel II d, enthaltend: *Generalregister, Ergänzungen und Nachträge zu den Fascikeln II a—c* (Landesvermessung, Kataloge der Kartensammlungen, Karten, Reliefs und Panoramen). Im Auftrage des eidgen. topograph. Büreaus redigirt von Prof. Dr. J. H. Graf. 220 Seiten 8°. Preis Fr. 3.—

Fascikel III: *Landes- und Reisebeschreibungen.* Ein Beitrag zur Bibliographie der schweizer. Reiselitteratur, 1479—1890. Zusammengestellt von A. Wäber, Bern. 462 Seiten 8°. Preis Fr. 4.—

Fascikel IV 3: *Balneologie und Climatotherapie.* Versuch einer schweiz. Bibliographie der Litteratur auf den Gebieten des Badewesens, der Heilquellen, der climaterischen Kurorte u. s. w. Von B. Reber in Genf. 130 Seiten 8°. Preis Fr. 2.—

Fascikel IV 6: *Die Fauna der italienischen Schweiz.* Redigirt von Prof. Dr. A. Lenticchia. Como 1894. 19 Seiten 8°. Preis 50 Cts.

Fascikel IV 6: *Fauna helvetica:* Heft 2: Seenfauna. Zusammengestellt von Prof. D. F. Zschokke. Bern 1897. 30 Seiten. 60 Cts.

Fascikel IV6: *Fauna helvetica.* Heft 3: Säugethiere. Zusammengestellt von Dr. H. Fischer-Sigwart. Bern 1900. 119 Seiten. Fr. 2.—

Fascikel IV 6: *Fauna helvetica.* Heft 4: Vögel. Zusammengestellt von Prof. Dr. Theophil Studer. Bern 1895. 57 Seiten 8°. Preis Fr. 1.—

Fascikel IV6: *Fauna helvetica.* Heft 5: Reptilien und Amphibien. Zusammengestellt von Dr. H. Fischer. 39 Seiten 8°. Preis Fr. 1.—

Fascikel IV6: *Fauna helvetica.* Heft 50: Fische. Zusammengestellt von Dr. H. Fischer-Sigwart. Bern 1900. 99 Seiten. Preis Fr. 1.50

(Fortsetzung auf Seite 3 des Umschlags.)

Mitteilungen

der

Naturforschenden Gesellschaft

in Bern

aus dem Jahre 1902.

Nr. 1519-1550.

Redaktion: J. H. GRAF.

BERN
Druck und Verlag von K. J. Wyss
1903

BOSTON
6 1939
MEDICAL LIBRARY

CATALOGUED
MAY 6 1939

Jahresbericht

über die

Thätigkeit der bernischen Naturforschenden Gesellschaft

im Vereinsjahr 1901/1902.

Hochgeehrte Herren!

Im abgelaufenen Vereinsjahr wurden 13 ordentliche Sitzungen abgehalten, welche im Durchschnitt von 25 Mitgliedern besucht waren. Es beteiligten sich dabei folgende Herren durch Vorträge, kleinere Mitteilungen oder Vorweisungen: A. Benteli (1), Brückner (2), Epstein (1), Ed. Fischer (2), Graf (1), Gruner (1), Guillebeau (1), G. Huber (1), R. Huber (1), Kissling (2), König (2), Kronecker (1), Pflüger (1), Ris (1), Schaffer (1), Steck (1), Streun (2), Th. Studer (4), Tschirch (1).

Von diesen Mitteilungen fallen auf:

Zoologie 5, Botanik 3, Biographie 3, Technik und Elektrotechnik 2, Geologie 2, Physik 2, physikalische Geographie 2, Meteorologie 2, Astronomie 1, Chemie 1, Opthalmologie 1, Physiologie 1, Tierarzneikunde 1.

Eine auswärtige Sitzung wurde in Grosshöchstetten abgehalten, an welcher Herr Th. Studer über «Neue Entdeckungen aus der Urgeschichte des Menschen», und Herr Guillebeau über «Die Bakterien der Euterentzündung bei Kühen» sprachen. Ferner hatten die Besucher dieser Sitzung Gelegenheit, einer Demonstration der Hagelkanonen durch die Firma Ruef beizuwohnen.

Eine ansehnliche Zahl von Mitgliedern unternahm Ende November, zur Zeit der Rübenernte, eine Fahrt nach Aarberg, wo denselben die Rübenzuckerfabrik vom technischen Leiter derselben in zuvorkommender Weise gezeigt wurde.

Als besonders wichtige Begebenheit des verflossenen Jahres ist zu erwähnen, dass die Bibliothek der schweizerischen naturforschenden Gesellschaft durch Beschluss der Jahresversammlung in Zofingen an die Stadtbibliothek Bern abgetreten worden ist und dass die bernische naturforschende Gesellschaft ihre eigene Bibliothek ebenfalls an die Stadtbibliothek Bern abgegeben hat. Den Mitgliedern der schweizerischen und der bernischen naturforschenden Gesellschaft ist dabei das Benützungsrecht der Berner Stadtbibliothek eingeräumt worden. Für beide Gesellschaften bedeutet dieses Abkommen eine finanzielle Entlastung. Die bernische

naturforschende Gesellschaft speziell begrüsst mit Genugtuung, als ein Akt der Billigkeit, dass die Bibliothek der schweizerischen naturforschenden Gesellschaft, für deren Verwaltung und Vermehrung sie alle die Jahre hindurch mit vielen Opfern von Zeit und Mühe gesorgt hat, endgiltig in Bern verbleibt. Sie verdankt dieses Ergebnis u. a. namentlich der Umsicht und Beharrlichkeit des Herrn Professor Th. Studer, dem hiermit der Dank der Gesellschaft ausgesprochen wird.

An der Jahresversammlung der schweizerischen naturforschenden Gesellschaft in Zofingen war unsere Gesellschaft durch die Herren Kissling und Strasser offiziell vertreten.

Für das Hallerdenkmal votierte sie einen auf zwei Rechnungsjahre zu verteilenden Beitrag von Fr. 500. Die Zahl der ordentlichen Mitglieder beträgt Anfang des Jahres 140.

Für das neue Vereinsjahr wurden gewählt: zum Präsidenten: Herr Prof. Dr. Hans Strasser, zum Vizepräsidenten: Herr Prof. Dr. J. H. Graf.

Für den abwesenden Präsidenten:

Der Sekretär.

Sitzungs-Berichte.

971. Sitzung vom 18. Januar 1902.

Abends 8 Uhr im Storchen.

Vorsitzender: Hr. E. Kissling. Anwesend: 14 Mitglieder und Gäste.

1. Herr L. Epstein spricht über: **Wanderungen durch den Tiergarten,** Zwecke und Ziele eines solchen.

Die Gefangenhaltung von Tieren reicht in weite Zeiten zurück. Durch geschichtliche Überlieferung wissen wir, dass Alexander der Grosse seinem Lehrer Aristoteles von seinem asiatischen Feldzuge Tiere aus Kleinasien schickte, die Spanier bei der Eroberung Mexicos die stehende Menagerie des Aztekenkönigs Montezuma vorfanden und Menagerien in China schon in früher Zeit existierten. Berühmt waren im vorletzten Jahrhundert die Menagerien des Prinzen von Oranien, in «hot Loo» beim Haag, im Tower of London und die heute noch bestehenden zu Schönbrunn und des Jardin des Plantes zu Paris. — An einem ca. 1819 in Frankfurt a. M. zur Schau gestellten indischen Nashorn beobachtete man zurst den periodischen Hornwechsel; interessant ist ferner, dass die Dronte in London schon 1638 gezeigt wurde.

Der erste zoologische Garten nach heutigem Sinne war der 1828 gegründete zoloogische Garten zu London. 1838 wurden in Amsterdam, 1843 in Antwerpen, 1844 in Berlin, 1858 in Frankfurt a. M., 1860 in Köln, 1863 in Hamburg etc. gleichfalls zoologische Gärten eröffnet.

Nach der historischen Einleitung kam der Vortragende ausser den eben erwähnten noch auf sonstige in- und aussereuropäische Gärten, so auch denjenigen zu Basel, den einzigen in der Schweiz, zu sprechen und dies gab ihm Gelegenheit, über das Gefangenleben, den Wert und die Rarität einzelner Tiere zu sprechen.

2. Hr. E. Kissling macht eine Mitteilung über die **Flügeldecke einer Rhina** aus der Molasse der Bäichlen im Entlebuch, mit Vorweisung des Petrefakten. Ferner eine Mitteilung über den Fund von **Murmeltierskeletten in alten Fluchtröhren** bei Biglen, ebenfalls mit Vorweisung der Skelette.

972. Sitzung vom 25. Januar 1902.

Abends 8 Uhr im zoologischen Institut.

Vorsitzender: Hr. E. Kissling. Anwesend: 37 Mitglieder und Gäste.

1. Hr. Th. Studer spricht über: **Die Rasse der St. Bernhardshunde** (mit Vorweisung des Schädels vom Hund Barry).

973. Sitzung vom 8. Februar 1902.

Abends 8 Uhr im Storchen.

Vorsitzender: Hr. E. Kissling. Anwesend: 21 Mitglieder und Gäste.

1. Hr. H. Kronecker spricht über: **Albrecht von Hallers physiologische Prioritäten.**
2. Hr. A. Tschirch legte einige **Ex libris von Haller** in Reproduktion vor. Zwei davon sind von Maler Duncker.

974. Sitzung vom 22. Februar 1902.

Abends 8 Uhr im Chemiezimmer des städt. Gymnasiums.

Vorsitzender: Hr. E. Kissling. Anwesend: 33 Mitglieder und Gäste.

1. Hr. E. König spricht über: **Die Umformung von Wechselstrom in Gleichstrom** durch Aluminium-Blei-Elektrolyt-Zellen (mit Experimenten).

975. Sitzung vom 8. März 1902.

Abends 8 Uhr im Storchen.

Vorsitzender: Hr. E. Kissling. Anwesend: 22 Mitglieder und Gäste.

Demonstrationsabend:

1. Hr. Pflüger spricht über das Werk «**Vergleichende Anatomie des Säugetierauges**, auf Grund von ophthalmoskopischen Untersuchungen» von George Lindsay Johnson M. D. F. R. C. S.

   Der Verfasser hat in 8jähriger Arbeit mit Furchtlosigkeit und grosser Ausdauer das Auge zahlreicher Säugetiere untersucht, z. T. in den zoologischen Gärten Londons und anderer europäischer Städte, sowie in Menagerien.

   Die Resultate beschlagen vor allem den Augenhintergrund; sowohl nach seiner Farbe als nach seiner Versorgung durch Gefässe lassen sich eine bestimmte Anzahl von Typen aufstellen. Während hier einzelne Spezies oder Genera jeder Hauptgruppe auf niedriger Entwicklungsstufe zurückgeblieben sind, finden wir in andern Beziehungen z. B. der Stellung der optischen Axen beider Augen zu einander eine der Klassifikation entsprechende fortschreitende Entwicklung vom Niedern zum Höhern, bis zur Parallelstellung der Axen mit Konvergenzvermögen beim Menschen und den Affen. Wo wir in höhern Gruppen Überbleibsel früherer Typen finden, entsprechen sie vielfach dem Prinzip der Zweckmässigkeit, was auf Phylogenese zurückgeführt werden muss. Überhaupt liefern die erhaltenen Resultate einen neuen zwingenden Beweis für die Entwicklungstheorie; sie zeigen ausserdem eine überraschende Übereinstimmung mit der modernen Klassifikation durch die Zoologen. Einige geringfügige Abänderungen werden vom Verfasser auf Grund seiner Befunde vorgeschlagen.

   In interessanter Weise lässt sich am Auge der Einfluss der Zähmung studieren. Es treten bedeutende individuelle Unterschiede innerhalb der Spezies auf, was bei den wilden Tieren nicht vorkommt. Myopie und Astigmatismus zeigen sich häufig als Folge der Zähmung.

   Das Referat wird durch Projektionen illustriert.

2. Hr. Ed. Brückner spricht über: **Die Beziehung zwischen Schichtung und Bänderung der Gletscher** (mit Projektionen).
3. Hr. G. Streun weist das **Horn eines Steinbockes vor**, das er auf der Strahlegg gefunden hat.

976. Sitzung vom 3. Mai 1902.

Abends 8 Uhr im Lokal des S. A. C. (Sektion Bern), Ratskeller.

Vorsitzender: Herr H. Strasser. Anwesend: 26 Mitglieder und Gäste.

1. **Der Jahresbericht** über das verflossene Vereinsjahr 1901/1902 wird verlesen und genehmigt.
2. Für das Vereinsjahr 1902/1903 wird in den **Vorstand** gewählt:
   Herr Prof. Dr. Hans Strasser zum Präsidenten
   Herr Prof. Dr. J. H. Graf zum Vizepräsidenten.
3. Herr P. Gruner spricht: **Ueber neue Sterne**, insbesondere den neuen Stern im Februar 1901.

   Der Vortragende gibt ein kurzes Verzeichnis der historisch nachgewiesenen Erscheinungen neuer Sterne und beschreibt den gewöhnlichen Verlauf eines derartigen Phänomens. Dabei wird besonders auf die interessanten Spektralerscheinungen hingewiesen, wonach auf das kontinuierliche Spektrum stets einige helle, breite, verwaschene Linien aufgelagert sind, auf der brechbaren Seite von dunklen Absorptionslinien begleitet. Die starke Verschiebung der Linien nach rot scheint auf gewaltige Geschwindigkeiten hinzuweisen; doch ist in neuerer Zeit ein ähnliches Spektralbild auf künstlichem Wege bei hohem Druck erzielt worden.

   Sodann wird eingehend der Verlauf der Erscheinung des neuen Sterns im Perseus (Februar 1901) beschrieben, die periodischen Helligkeitsschwankungen im April mit den gleichzeitigen Spektrum-Änderungen hervorgehoben, und endlich auf die eigenartigen Nebelbildungen, die seit September 1901 unzweifelhaft konstatiert wurden, hingewiesen. — Die verschiedenen Hypothesen zur Erklärung des Entstehens dieser «neuen Sterne», sowie auch die fabelhafte Geschwindigkeit der Nebelausbreitung (ca. 300,000 km in 1 Sek.) werden zum Schlusse berührt.

977. Sitzung vom 8. Juni 1902.

Vormittags 10 Uhr im Museum in Neuenstadt.

Vorsitzender: Hr. H. Strasser. Anwesend: 28 Mitglieder, 5 Gäste.

1. Herr Th. Studer spricht über: **Faunistisches** von der Bielerinsel.
2. Herr J. H. Graf spricht über: **Ueberschwemmungen vom Seeland** (mit Vorweisung von Karten).
3. Hr. Dr. Gross (Neuenstadt) spricht über **Praehistorische Verhältnisse** der Petersinsel.

Nach der Sitzung Fahrt per Extradampfer nach der Petersinsel, wo gemeinsam mit Gästen aus Neuenstadt, Biel und Umgebung, sowie aus Neuenburg das Mittagessen und nachher ein Spaziergang stattfand.

978. Sitzung vom 25. Oktober 1902.

Abends 8 Uhr im Storchen.

Vorsitzender: Herr H. Strasser. Anwesend: 30 Mitglieder und Gäste.

1. Die vom Kassier vorgelegte **Rechnung über das abgelaufene Rechnungsjahr** wird genehmigt und verdankt.
2. Herr Th. Studer spricht über **« eine jetzt noch lebende Urform des Pferdes »**.
3. Herr Ed. Fischer demonstriert in Ergänzung seines am 19. Okt. 1901 gehaltenen Vortrages zwei im Mai 1901 **mit den Basidiosporen von Melampsorella Caryophyllacearum** DC. **infizierte Weisstannen**, an denen sich im Frühjahr 1902 kleine Hexenbesen entwickelt haben.

979. Sitzung vom 8. November 1902.

Abends 8 Uhr im Chemie-Zimmer des städt. Gymnasiums.

1. Herr E. König spricht und experimentiert über: **Elektrische Strom- und Spannungsresonanz.**

   Als Einleitung zu dem Hauptgegenstande demonstrierte der Vortragende das Verhalten eines Kondensators von 12 Mikrofarad Kapacität (bis 300 Volt brauchbar) im Wechselstromkreise. Die Experimente zeigten, wie bei Serienschaltung des Kondensators mit einem Widerstand von passender Selbstinduktion die Spannung an den Klemmen des Kondensators ein Vielfaches der Gesamtspannung sein kann, wie ferner bei Parallelschaltung des Kondensators mit einem Induktionswiderstand maximale Stromresonanz unter denselben Bedingungen stattfinde wie die Spannungsresonanz bei Serienschaltung. Die praktische Bedeutung der Kondensatorerscheinungen wurde erläutert an Hand der von Fleming, Cardew, Preece, Ferranti seinerzeit an den Kabeln Deptford-London angestellten Versuche und das Wesen des so viel missverstandenen «Ferrantieffektes» erklärt. Glücklicherweise sind in der Praxis im allgemeinen die Verhältnisse der Ausbildung von bedeutenden elektrischen Schwingungen in den Kabeln nicht günstig, indem die Eisenmassen der Transformatoren drosselnd auf dieselben wirken. Im Anschluss daran zeigte der Vortragende das Auftreten von Wechselströmen von hoher Frequenz und verhältnismässig hoher Stromstärke in einem parallel an die Klemmen einer Gleichstrombogenlampe angelegten Kondensatorkreise. Die Versuche zeigten deutlich die Unbrauchbarkeit elektromagnetischer Messinstrumente zur Messung dieser Wechselströme von bis zu 20,000 Stromwechseln per Sekunde, das Auftreten von Impedanzerscheinungen in den Leitungen, die einfache Konstruktion der Transformatoren ohne Verwendung von Eisen etc. Zum Schluss wurde beiläufig erwähnt, es scheine die Wirkung von Wechselströmen dieser Frequenz auf die Nerven kräftiger und unangenehmer zu sein als mit langsamern Schwingungen.
2. Hr. Heffter demonstriert einige **Pfeilgifte** aus Ostafrika, in Ergänzung seines früheren Vortrages über diesen Gegenstand.

980. Sitzung vom 22. November 1902.

Abends 8 Uhr im Storchen.

Vorsitzender: Hr. H. Strasser. Anwesend: 29 Mitglieder und Gäste.

Feier zur Erinnerung an Herrn Dr. Edmund von Fellenberg †.

1. Es sprechen die Herren Strasser, Th. Studer und A. Baltzer, letzterer speziell über Fellenberg als Geologen.

981. Sitzung vom 13. Dezember 1902.

Abends 8 Uhr im geologischen Institut.

Vorsitzender: Hr. H. Strasser. Anwesend: 57 Mitglieder und Gäste.

1. Es wird die **Adresse** verlesen, welche unsere Gesellschaft Herrn **Professor Dr. Ludwig Fischer** überreicht, zur Feier seiner 50jährigen Mitgliedschaft (Eintritt 18. Dezember 1852) in der bern. naturf. Gesellschaft.
2. Hr. Ed. Brückner spricht über: **Zur Entstehung des schweizerischen Jura und seiner heutigen Formen** (mit Projektionen).

Verzeichnis der Mitglieder
der
Bernischen Naturforschenden Gesellschaft.

(Am 31. Dezember 1902.)

Die mit * bezeichneten Mitglieder wurden im Jahre 1902 neu aufgenommen.

Vorstand.

Prof. Dr. *H. Strasser,* Präsident.
Prof. Dr. *J. H. Graf,* Vize-Präsident.
B. Studer, jun., Apotheker, Kassier seit 1875.
Prof. Dr. *J. H. Graf,* Redaktor der Mitteilungen seit 1883.
Dr. *Th. Steck,* Oberbibliothekar und Geschäftsführer des Lesezirkels.
Dr. *R. Huber,* Sekretär seit 1901.

Mitglieder.

1.	*Allemann,* J., Arzt, Zweisimmen	1898
2.	*Anderegg,* Ernst, Dr. phil. und Gymnasiallehrer, Bern .	1891
3.	*Andreæ,* Philipp, gew. Apotheker, Bern	1883
4.	*Badertscher,* Dr. A., Vorsteher der Knab.-Sekundarschule Bern	1888
5.	*Balmer,* Dr. Hans, Bern	1886
6.	*Baltzer,* Dr. A., Professor der Mineralogie und Geologie, Bern	1884
7.	*Beck,* Dr. Gottl., Lehrer des Freien Gymnasiums, Bern .	1876
8.	*v. Benoit,* Dr. jur. G., Bern	1872
9.	*Benteli,* A., Professor und Rektor, Bern	1869
10.	*Benteli,* A., Buchdrucker, Bern	1891
11.	*Bohren,* A., Dr. phil., Lehrer an der landwirtsch. Schule Rütti	1901
12.	*Brückner,* Dr. Ed., Prof. der Geographie, Bern . .	1888
13.	*Brunner,* C., Dr. phil., Hofrath, Trautsohngasse 6, Wien .	1846
14.	*Büchi,* Fr., Optiker, Bern	1874
15.	*Burri,* Dr. phil., Prosektor	1895
16.	*v. Büren,* Eug., allié von Salis, Sachwalter, Bern . .	1877
17.	*Coaz,* Dr., eidgenössischer Oberforstinspektor, Bern . .	1875
18.	*Conrad,* Dr. Fr., Arzt in Bern	1872
19.	**Crelier,* Dr., Priv. Doc., Lehrer am Technikum Biel .	1902
20.	*Dick,* Dr. Rud., Arzt in Bern	1876
21.	*Droz,* Arnold, Kantonsschullehrer in Pruntrut . . .	1890
22.	*Dubois,* Dr. med., Arzt, Professor, Bern	1884
23.	*Dumont,* Dr. med. F., Arzt, Professor, Bern . . .	1890
24.	*Dutoit,* Dr. med., Arzt in Bern	1867

25. **Eberhard*, Dr. phil., Lehrer am Gymnasium Biel . . 1902
26. *Egues*, Jules, Dr. med., Corgémont 1898
27. *Engelmann*, Dr., Apotheker in Basel 1874
28. *Farner*, Dr. A., Apotheker 1899
29. *Fischer*, Dr. phil. Ed., Professor der Botanik, Bern . . 1885
30. *Fischer*, Dr. L., Honorar-Professor, Bern 1852
31. *v. Freudenreich*, Dr. E., Bern 1885
32. *Friedheim*, Dr. Prof., Bern 1897
33. *Geering*, Ernst, Dr. med., Reconvillier 1898
34. **Gerber*, E., Lehrer, Florastrasse 17, Bern . . . 1902
35. *de Giacomi*, J., Dr. med., Arzt und Privatdozent, Bern . 1889
36. *Girard*, Prof. Dr. med., Arzt in Bern 1876
37. *Gosset*, Philipp, Ingenieur, Wabern bei Bern . . . 1865
38. *Graf*, Dr. J. H., Professor der Mathematik, Bern . . 1874
39. *Gressly*, Alb., Oberst, Maschinen-Ingenieur, Bern . . 1872
40. *Grimm*, J., Präparator, Bern 1876
41. *Gruner*, Dr. Paul, Gymnasiallehrer und Dozent, Bern . 1892
42. **v. Grünigen*, Lehrer, Bern 1902
43. *Guillebeau*, Professor Dr., Bern 1878
44. **Gurwitsch*, Dr., Priv. Doc., Anat. Institut . . . 1902
45. *Haaf*, C., Droguist, Bern 1857
46. *Haas*, Dr. med., Sigismund, Arzt in Muri bei Bern . . 1890
47. *Häni*, Rud., Dr. med., Arzt in Köniz 1900
48. *Hartmann*, Dr. phil., Mathemat. a. Eisenbahndepartement, Bern 1898
49. *Heffter*, Dr. A. W. A., Prof. der med. Chemie u. Pharmakologie 1899
50. *Held*, Leonz, Chef des eidgen. topograph. Bureaus, Bern . 1879
51. **Helgers*, cand. phil., Bern 1902
52. *Huber*, Dr. G., Professor der Mathematik, Bern . . 1888
53. *Huber*, Rud., Dr. phil., Gymnasiallehrer, Bern . . . 1891
54. *Hug*, Otto, Dr. phil., Bern 1897
55. *Jacky*, Ernst, Dr. phil., Bern 1901
56. *Jadassohn*, Dr. Prof., Bern 1897
57. *Jenner*, E., Entomolog, hist. Museum, Bern . . . 1870
58. *Jonquière*, Dr. med. Georg, Arzt in Bern 1884
59. **Juillerat*, Lehrer am Technikum Biel 1902
60. *Käch*, P., Sekundarlehrer in Bern 1880
61. *Kaufmann*, Alfr., Dr. phil. und Gymnasiallehrer, Bern . 1886
62. *Kesselring*, H., Lehrer an der Sekundarschule in Bern . 1870
63. *Kissling*, Dr. E., Sekundarlehrer und Privatdozent, Bern . 1888
64. *Kobi*, Dr., Rektor der Kantonsschule Pruntrut . . . 1878
65. *Kocher*, Dr., Professor der Chirurgie, Bern . . . 1872
66. *von Kostanecki*, Dr., Professor der Chemie, Bern . . 1896
67. *König*, Emil, Dr. phil., Gymnasiallehrer u. Dozent, Bern . 1893
68. *Körber*, H., Buchhändler in Bern 1872
69. *Kraft*, Alex., Besitzer des Bernerhofs, Bern . . . 1872
70. *Krebs*, A., Dr. phil., Seminarlehrer in Bern . . . 1888
71. *Kronecker*, Dr. H., Professor der Physiologie, Bern . . 1884
72. *Kummer*, Dr. med. J., Arzt in Bern 1890
73. *La Nicca*, Dr. med. R., Arzt in Bern 1899
74. *Lanz*, Dr. Em., Arzt in Biel 1876
75. *Leist*, Dr. K., Lehrer an der Sekundarschule in Bern . 1888

76. *Lerch*, M., Professor Dr. in Freiburg 1898
77. *v. Lerber*, A., Dr. med., Arzt in Laupen 1898
78. *Lindt*, Dr. med., W., Arzt und Dozent in Bern . 1888
79. *Lory*, C. L., Rentier in Münsingen 1894
80. *Lüscher*, E., Dr. med. in Bern 1895
81. *Lütschg*, J., gewesener Waisenvater in Bern . . . 1872
82. **Mai*, Dr. Jul., P.-D. der Chemie 1902
83. *Marti*, Lehrer an der Neuen Mädchenschule in Bern . 1892
84. *Mooser*, W., Dr., Belpstrasse 71, Bern 1901
85. *Moser*, Ch., Professor Dr. in Bern 1884
86. *Müller*, Emil, gew. Apotheker in Bern 1882
87. *Müller*, Professor Dr., P., in Bern 1888
88. *v. Mutach*, Alfred, von Riedburg, Bern 1865
89. *Mützenberg*, Dr. med. Ernst, Spiez 1885
90. *Nanny*, Dr. Wilhelm, Arzt in Mühleberg 1890
91. *Nicolet*, L., Pharmacien, St. Imier 1892
92. *Pfister*, J. H., Mechaniker in Bern 1871
93. *Pflüger*, Dr. Professor in Bern 1889
94. *Pulver*, G., Vorsteher in Hindelbank 1891
95. *Renfer*, H., Dr. Prof. an der Handelsakademie in St. Gallen 1898
96. *Ris*, F., Lehrer der Physik am städtischen Gymnasium . 1869
97. **Rosenmund*, Oberst, Ingenieur, Bern 1902
98. *Rothen*, G., Sekundarlehrer, Bern 1900
99. *Rothenbühler*, Dr., Sekundarlehrer in Bern. 1896
100. *Rubeli*, Dr. O., Professor an der Thierarzneischule, Bern . 1892
101. *Sahli*, Professor Dr. H., Bern 1875
102. *Sauter*, Dr. J., Ingenieur, Bern 1900
103. *Schaffer*, Prof. Dr., Kantonschemiker, Bern . . . 1878
104. *Schapiro*, Dr. J., Bern 1900
105. *Schlachter*, Dr., Gymnasiallehrer, Bern 1884
106. *Schmid*, Dr. W., Oberst, Oberinstruktor der Artillerie, Bern 1891
107. **Schönemann*, Dr., Bern 1902
108. *Schürch*, Otto, Dr. phil., Zahnarzt, Langnau . . . 1898
109. *Sidler*, Dr., Honorar-Professor, Bern 1856
110. *v. Speyr*, Dr. Prof., Direktor der Waldau . . . 1898
111. *Spiess*, Otto, Dr., Assistent in Trappes (France) . . 1901
112. *Stäger*, Rob., Dr. med., Bern 1898
113. *Steck*, Th., Dr. phil., Konservator am Naturhist. Museum Bern 1878
114. *Steiger*, Hans, Oberstlieutenant, Bern 1897
115. **Steinegger*, Rud., Dr., I. Assistent, Liebefeld . . . 1902
116. *Stooss*, Max, Professor Dr. med., Arzt in Bern . . 1883
117. *Strasser*, Dr. Hans, Professor der Anatomie, Bern . . 1872
118. *Strelin*, Alexander, Dr. med., Arzt, Bern 1898
119. *Streun*, G., Dr., Sekundarlehrer, Bern 1898
120. *Studer*, Bernhard, sen., Bern 1844
121. *Studer*, Bernhard, Apotheker, Bern 1871
122. *Studer*, Dr. Theophil, Professor der Zoologie, Bern . . 1868
123. *Studer*, Wilhelm, Apotheker in Bern 1877
124. *Tambor*, J., Dr. phil., Prof., Laboratorium, Bern . . 1894
125. *Tanner*, G. H., Apotheker in Bern 1882
126. *Tavel*, Professor Dr. E., Bern 1892

127. *Thiessing,* Dr., Redaktor, Bern 1867
128. *Thomann,* Dr., Apotheker in Bern 1901
129. *Truninger,* E., Cäzilienstrasse 44, Bern 1901
130. *v. Tscharner,* Dr. phil. L., Oberst, Bern 1874
131. *v. Tscharner-de Lessert,* Oberst, Bern 1878
132. *Tschirch,* Dr. A., Professor der Pharmakognosie in Bern . 1890
133. *Valentin,* Professor Dr. med. Ad., Arzt in Bern . . . 1872
134. *Vögeli,* H., Dr. med., Thun 1898
135. *Volz,* Wilhelm, Apotheker in Bern 1887
136. *Wäber-Lindt,* A., Bern 1864
137. *Walthard,* Max, Dr. med. P.-D., Arzt in Bern . . . 1894
138. *v. Wattenwyl-v. Wattenwyl,* Jean, Oberst, Bern . . 1877
139. *Wilhelmi,* A., Dr. Thierarzt, Bern 1898
140. *Wüthrich,* Dr. phil. E., Direktor der Fabrik Neuenegg . 1892
141. *Wyss,* Dr. G., Buchdrucker in Bern 1887
142. *Wyttenbach-v. Fischer,* Dr., Arzt in Bern 1872
143. *Zeller,* R., Dr. phil., Geolog, Bern 1893
144. *Zumstein,* Dr. med., J. J., in Marburg . . . 1885

Mitgliederzahl auf 31. Dezember 1902: 144.

Im Jahre 1902 ausgetreten:

Hugi, E., Dr. phil., Assistent am geolog. Institut, Bern . . 1900
Marckwald, Dr. Max, Frankfurt a. M. 1889
Müller, Max, Dr. med. in Bern 1893
Pulver, E., Apotheker in Interlaken 1890

Im Jahre 1902 gestorben:

v. Fellenberg, Dr. phil. E., Bergingenieur, Bern . . . 1861
Wanzenried, Sekundarlehrer in Grosshöchstetten . . . 1867
Wollensack, Heinrich, Dr. med., Giessbach 1898

Korrespondierende Mitglieder:

1. *Flesch*, Dr. M., Arzt in Frankfurt 1882
2. *Gasser*, Dr. E., Professor der Anatomie in Marburg . . 1884
3. *Graf*, Lehrer in St. Gallen 1858
4. *Grützner*, Dr. A., Professor in Tübingen 1881
5. *Hiepe*, Dr. Wilhelm, in Birmingham 1874
6. *Imfeld*, Xaver, Topograph in Hottingen 1880
7. *Krebs*, Gymnasiallehrer in Winterthur 1864
8. *Landolf*, Dr., in Chili 1881
9. *Lang*, Dr. A., Professor in Zürich 1876
10. *Leonhard*, Dr., Veterinär in Frankfurt 1870
11. *Lichtheim*, Professor in Königsberg 1881
12. *Metzdorf*, Dr., Prof. der Vet.-Schule in Proskau, Schlesien. 1870
13. *Petri*, Dr. Ed., Professor der Geographie in St. Petersburg 1883
14. *Regelsperger*, Gust., Dr., rue la Boétie 85, Paris . . 1883
15. *Rothenbach*, Lehrer am Lehrerseminar in Küssnacht . . 1871
16. *Wälchli*, Dr. med. D. J., Buenos Ayres 1873
17. *Wild*, Dr. Professor, in Zürich 1859

Rechnung der bernischen naturforschenden Gesellschaft pro 1901.

Einnahmen.

An Jahresbeiträgen	Fr.	1064.—
An Eintrittsgeldern	»	30.—
An Zinsen	»	125.05
An verkauften Mitteilungen	»	13.50
An ausserordentlichen Beiträgen	»	308.20
	Fr.	1540.75

Ausgaben.

Passiv-Saldo letzter Rechnung	Fr.	243.15
Mitteilungen	»	1142.75
Bibliothek	»	193.20
Sitzungen	»	119.20
Lesezirkel	»	71.40
Verschiedenes	»	84.00
	Fr.	1853.70

Bilanz.

Ausgaben	Fr.	1853.70
Einnahmen	»	1540.75
Passiv-Saldo	Fr.	312.95

Reservefonds

ist im Jahre 1901 unverändert geblieben wie im Vorjahre Fr. 1800.—

Koch-Fundus

Kassa-Schein der Hypothekarkassa des Kantons Bern à 4% . Fr. 500.—

Vermögensetat.

Das Vermögen der bernischen naturforschenden Gesellschaft besteht auf 31. Dezember 1901 in dem Reservefonds	Fr.	1800.—
Kochfundus	»	500.—
	Fr.	2300.—
Weniger dem Passiv-Saldo obiger Rechnung	»	312.95
Demnach netto	Fr.	1987.05
Auf 31. Dezember 1900 betrug das Vermögen	Fr.	2056.85
Auf 31. Dezember 1901 beträgt dasselbe	»	1987.05
Es ergibt sich demnach eine Verminderung um	Fr.	69.80

Der Kassier:

B. Studer-Steinhäuslin.

Genehmigt in der Sitzung vom 25. Oktober 1902.

Professor Daniel Huber

(Nach einem Bilde im Besitze der Tit. Familie Huber-Burckhardt in Basel)

J. H. Graf.

Daniel Huber's trigonometrische Vermessung des Kantons Basel (1813—1824).

(Vorgetragen in der Sitzung vom 30. November 1901.)

Beim Durchgehen eines Katalogs des Antiquariats Geering in Basel fand sich ein Manuscript «Trigonometrische Berechnungen von Prof. Daniel Huber», welches auf unsere Veranlassung sofort vom Eidgen. topographischen Bureau in Bern erworben worden ist. Das sauber geschriebene und gut erhaltene Manuscript erwies sich als ein «Versuch einer trigonometrischen Vermessung des Kantons Basel von Daniel Huber, Prof. Math. 1824», und dasselbe soll nun im Nachfolgenden mit einigen Erläuterungen und Bemerkungen zum theil auszugsweise wiedergegeben werden. Denselben fügen wir einige andere Akten bei, welche uns gütigst vom Staatsarchiv Baselstadt zur Bearbeitung überlassen worden sind.

Daniel Huber (1768—1829), dessen Biographie einerseits von *P. Merian*[1]), andrerseits von *R. Wolf*[2]) gegeben worden ist, war der Sohn des Astronomen *Joh. Jakob Huber*[3]) (1733—1798), dessen Biographie wir 1892 der Basler Naturforschenden Gesellschaft bei Anlass der Feier ihres 75jährigen Bestehens gewidmet haben. Wenn auch Joh. Jakob Huber viele Misserfolge bei seinem wissenschaftlichen Streben zu verzeichnen hatte, so hat er trotz derselben in seinem Sohne Daniel das heilige Feuer der Begeisterung für die wissenschaftliche Forschung anzufachen und zu nähren gewusst, so dass Basel in Professor Daniel Huber ein ausserordentlich tüchtiger Bürger heranwuchs, dessen Namen dort noch

[1]) Nekrolog von P. Merian in den Verhandlungen der Schweizer. Naturf. Gesellschaft 1830. S. 145—152.

[2]) Biographien zur Kulturgeschichte der Schweiz I. S. 441—462.

[3]) Das Leben und Wirken des Physikers und Astronomen Joh. Jakob Huber aus Basel (1733—1798). Mit dem Bildnisse Hubers und einer Tafel, seine von ihm erfundene freie Uhrhemmung darstellend. Mittheilungen der Berner Naturf. Gesellschaft. 1892.

jetzt in hohem Andenken steht. Daniel Huber verzichtete 1790 auf die Berufung als Astronom an das Observatorium in Danzig und wurde im folgenden Jahre Nachfolger seines Lehrers *Johannes II. Bernoulli* auf dem Lehrstuhl der Mathematik an der Hochschule seiner Vaterstadt. Huber hat durch eigenes Nachdenken die *Methode der kleinsten Quadrate* gefunden, deren Entdeckung dann später *Gauss* und *Legendre* zugeschrieben wurde. Sein mathematisches Hauptwerk ist eine Parallelentheorie: «Nova theoria de parallelarum rectarum proprietatibus, Basil., 1823 in 8», ein Werk, über das sich Legendre sehr anerkennend ausgesprochen. Daneben hat Huber die Astronomie nicht vernachlässigt. Ausser einigen astronomischen Manuscripten, welche im Besitze der Universitätsbibliothek in Basel sind, publizierte er:

1) Circa phænomena quae in stella Persii Algol observantur quædam proponit D. Huber. (Nova Acta helvetica vol. 1. Basil., 1787 in 4.)

2) Versuch über das astronomisch-nautische Problem betreffend die Reduktion der scheinbaren Monds-Distanzen auf wahre.
(Zachs monatliche Korrespondenz.)

3) Versuch über die Verdienste Lamberts in den mathematischen und physischen Wissenschaften. Basil., 1829 in 8.

Er wusste auch seine Kollegen von der philosophischen Fakultät dafür zu bestimmen, dass aus Geldern der Fakultät, durch Zachs Vermittlung, ein Spiegelsextant von Troughton mit silbernem Limbus angeschafft wurde. D. Huber ist uns aber noch bedeutend dadurch, dass er 1816 an der 2. Versammlung der Schweizer. Naturforschenden Gesellschaft in Bern theilnahm und 1817 die blühende Basler Naturforschende Gesellschaft gestiftet hat. Er wurde 1821 Jahrespräsident der Versammlung der Schweiz. Naturforschenden Gesellschaft in Basel.

Endlich ist noch eine Seite seiner Thätigkeit zu erwähnen. 1802 wurde er Bibliothekar der Universitätsbibliothek, welche er nicht nur jahrelang ausgezeichnet verwaltete, sondern welcher er bei seinem Tode seine ganze Bücherei, alle seine Manuscripte und Instrumente, damals auf ca. 30,000 Fr. gewerthet, hinterliess. Dadurch ist die Basler Universitätsbibliothek zu einer wahren Fundgrube für die ältere Litteratur für jeden Mathema-

tiker, Astronomen und Physiker geworden. Huber starb ziemlich unerwartet am 3. Dezember 1829.

Für seine Instrumente[1]) fand er in Basel einen ausgezeichneten Mechaniker *Joh. Burkard Ecklin* (1788—1856), der ihm besonders in den Jahren seiner trigonometrischen Operationen sehr zu statten kam. Ecklin hatte einige Zeit beim berühmten Mechaniker Reichenbach in München gearbeitet und sich 1812 in Basel etablirt. Dann sind als Huber's Mitarbeiter auf dem Gebiete der Vermessung zu nennen:

1) *Joh. Jakob Schäfer* von Seltisberg bei Liestall (1745—1823), ursprünglich Müller, dann Landkommissarius. 1798 Mitglied der aus 5 Gliedern bestehenden Verwaltungs-Kammer von Basel.

2) *J. M. Zeiher* aus dem Anspachischen, ein geschickter Gärtner, Botaniker und Geometer.

3) *Andreas Merian*, 1794 in Basel geboren, wurde 1813 Adjunkt des Landkommissärs Schäfer und des Oberförsters Hagenbach. Einige Jahre später bestimmte man seine Pflichten näher; darnach sollte er in erster Linie dem Landkommissär bei staatlichen Vermessungen helfen, in der übrigen Zeit dem Oberförster die Bureaugeschäfte besorgen etc. Merian konnte mit staatlicher Beihülfe 1817 zwei Jahre in Karlsruhe und München sich weiter ausbilden, kehrte 1819 zurück, sollte H. bei seiner Vermessung beistehen. 1822 wurde er Strassen- und Wasserbauinspektor. Anfang der dreissiger Jahre in die politischen Unruhen verwickelt, wurde er in seinem Amt stillgestellt; er verliess Basel und ging nach Aarau. Nachher amnestiert, kehrte er nicht mehr in seine frühere Stellung zurück, sondern suchte er 1834 seine Entlassung nach, welche er erhielt. Gegen Ende seines Lebens wohnte er in Neuenburg und starb dort.

4) *Andreas Bräm* von Dättlikon, 1797 in Basel geboren. Er hatte aus Liebhaberei, durch Augenmass und Abschreiten, eine Karte eines Grosstheils vom Kanton Basel, sowie der angrenzenden Theile des Bisthums und des Mark-

[1]) Wolf, Geschichte der Vermessungen. 195—198.

grafenlandes gemacht, die gar nicht übel war. Huber wurde auf ihn aufmerksam; er anerbot sich, Bräm in den Gebrauch der Instrumente einzuführen und darin leistete er Huber grosse Dienste. Bräm machte dann 1825 sein theologisches Examen, war eine Zeit lang Lehrer an der Töchterschule, er wurde sodann Pfarrer in Duisburg und in Mörs in Rheinpreussen, wo er starb.

Schon im Jahr 1811 hat *Dr. C. Bernoulli*[1]) eine Vermessung des Kantons Basel geplant und am 5. Juni 1812 eine sachbezügliche Eingabe an einen einflussreichen Ratsherrn mit der Bitte um Beihülfe gerichtet. (Siehe Anhang Nr. 1), worauf die «lobl. Haushaltung» des Kantons, eine Art Staatswirtschafts-Kommission mit exekutiver Gewalt, am 24. Juni 1812 den Auftrag erhielt, die Angelegenheit zu untersuchen und sich mit Herrn Bernoulli in Verbindung zu setzen (Anhang Nr. 2). In einer weitern Eingabe (Anhang Nr. 3) vom 27. Juni 1812 theilt Bernoulli mit, dass er sich mit dem Herrn Ratsherrn *Finsler* in Zürich, dem spätern Oberstquartiermeister, und Herrn Präsident *Escher* in Verbindung gesetzt und sich über sein Unternehmen mit ihnen, hauptsächlich über die Instrumente, beraten habe. Wohl habe die phil. Fakultät einen Sextanten, der aber nicht so praktisch für die Kantonsvermessung zu gebrauchen wäre; es wäre besser, einen Theodoliten in Stuttgart, Darmstadt oder wenigstens in Zürich (bei Oeri) zu bestellen, dessen Ausgabe sich auf ca. 20—30 Louisd'or belaufen würde. Daraufhin wurde am 20. Juli die Universität angefragt, welche Instrumente dem Herrn Dr. C. Bernoulli für sein Unternehmen zur Verfügung gestellt werden könnten (siehe Anhang Nr. 4), worauf der Rektor, Prof. Hier. König, einen von Prof. Daniel Huber mit vielem

[1]) Es ist dies wohl kein anderer als *Christoph Bernoulli*, geb. 15. Mai 1782, Sohn des Professors der Eloquenz und Dompropsteischaffners Daniel II. Bernoulli. C. Bernoulli studierte 1801 in Göttingen, wo er auch doktorierte, wurde Lehrer am Pädagogium in Halle, besuchte Berlin und Paris und wurde Professor an der Basler Hochschule. Technisch ist er bekannt als Verfasser des «Vademekum des Mechanikers», das 1829 bei Cotta zum ersten Male erschienen ist. Über das Leben dieses auch als Nationalökonom bedeutenden Gelehrten vergl. F. Burckhardt, Zeitschrift für schweiz. Statistik. 1898. 34. Band.

Fleiss ausgearbeiteten und die ganze Wichtigkeit dieses Gegenstandes in das helleste Licht stellenden Bericht einsandte. (25. Juli 1812).

Die Regierung bewilligte unter dem 23. Dezember 1812 den Kredit für Auschaffung eines Theodoliten. Es scheint aber, dass daraufhin Bernoulli die Sache liegen liess. Hingegen trat nun Professor Daniel Huber an seine Stelle. Von ihm rührt her eine Eingabe vom 4. Mai 1813 folgenden Inhalts:

Wohlweiser Herr Bürgermeister,
Hochgeachte Herren!

Zu Ende vorigen Jahres haben Ew. Weisheiten Einer Löbl. *Haushaltung* die Hand zu öffnen geruht, um einen Theodoliten anzuschaffen, der zur trigonometrischen Aufnahme unsers Cantons zunächst dienen sollte. Dieses Instrument war alsobald bey den Hrn Baumann u. Kinzelbach in *Stuttgard* bestellt worden, welche mir dasselbe vor Ende gegenwärtigen Monats zu liefern zugesichert haben.

Da nun also diese Operationen bald ihren Anfang nehmen können, so ergeht an Ew. Weisheit hiermit in Ehrerbietung das geziemende Ansuchen um die Bewilligung folgender Punkte, welche zum guten und ungehinderten Fortgang dieser Messungen erforderlich sind.

Erstlich: ein Patent, durch welches ich zu dieser Arbeit Hochobrigkeitlich autorisirt würde, und in welchem die Herren Bezirksstatthalter, sowohl als die Herren Gemeinde Raths Präsidenten, angewiesen würden, mir auf mein Ansuchen den benöthigten Schutz, Unterstützung und Beyhülfe in Betreff der zu errichtender Signale, des Transport der Instrumente, u. s. w. zu gewähren.

Zweytens wünschte ich: dass, entweder diesem Patente beygefügt, oder in einem besondern Passus eine Empfehlung an die nächsten höhern und niedern Behörden der Gränz Cantone *Solothurn* und *Aargau* ausgefertigt würde, mir benöthigten Falls ihren Schutz ebenfalls angedeihen zu lassen. Da es für die Triangulirung unsers Cantons vortheilhaft seyn wird, wenigstens zwey Standpunkte im Canton *Solothurn*, nämlich auf dem *Paschwang*, u. auf der *Gempenfluh* damit zu verbinden, so werde ich, wenn ich das Locale näher werde bestimmt haben, alsdann bey

Ew. Weisheiten besonders um Verwendung bey der hohen Regierung von *Solothurn* anhalten.

Drittens: Die Anweisung einer *Behörde*, welcher ich sowohl den Plan der zu unternehmender Arbeit, zur Genehmigung, als auch die betreffenden Conti für die Errichtung der Signale, für den Transport der Instrumente, u. für andre Auslagen, zur Bezahlung vorzulegen hätte.

Viertens: Einen Auftrag an Lobl. Waldkommission: den Herrn *Oberförster* zu bevollmächtigen, dass ich mich, um die Arbeit zu befördern, nur an Ihn zu wenden hätte; sey es wegen Herbeyschaffung des benöthigten Holzes zu den Signalen, oder wegen der zu Erhaltung freyer Aussicht etwaigen nöthiger Wegräumungen.

Ew. Weisheiten können versichert seyn, dass ich es mir zur angelegentlichsten Pflicht machen werde, die Waldungen des Cantons in aller Rücksicht auf das gewissenhafteste zu schonen; so wie ich mich auch überhaupt verpflichte, nicht nur keine unnöthigen Ausgaben zu veranlassen, sondern auch mit allem Eifer darauf zu sehen, dass in allem die grösstmögliche Oeconomie beobachtet, und der Staat so wenig als möglich mit Ausgaben belästigt werde.

Obigen Punkten wage ich noch einen unvorgreiflichen Vorschlag beyzufügen. Die Erfahrung zeigt, dass solche Signale nicht nur von Wind und Wetter, sondern auch von Muthwillen und Eigennutz manchmal Anfälle auszuhalten haben. Ich glaube also, es würde nicht unthunlich seyn: entweder durch eine öffentliche Publication, oder durch eine den Gemeinden vorzulesende Ermahnung zu erklären, dass die zu errichtenden Signale mit Vorwissen und Bewilligung der hohen Obrigkeit aufgestellt, und unter ihrem besondern Schutze stehen, und vor jeder Beschädigung derselben ernstlich zu warnen.

Ich verharre übrigens mit schuldiger Hochachtung Ew. Weisheiten

Treugehorsamer Burger

Dan. Huber, Prof. Math.

Basel. 1813 Maj 4.

Ferner eine *Eingabe vom 18. Mai 1813 an die hochlöbl. Haushaltung des Kantons Basel.* Dieselbe besteht aus folgenden Teilen:

I. Teil: Huber setzt den Gang der trigonometrischen Vermessung des Landes auseinander, vor allem die Grundlage derselben, die Basismessung. Die Messung einer Basis sei aber eine delikate Sache. Es sei besser, an eine bereits begonnene Vermessung, wie diejenige von Schanzenherr *Feer* von Zürich aus, oder die von Professor *Trechsel* von Bern aus angefangene, anzuschliessen. Auch hofft er auf die Verbindung mit einer dritten Triangelreihe, welche Hofrath *Wild* in Müllheim i. B., gestützt auf eine nahe bei Müllheim gemessene Basis, begonnen hat. Dann kommt er auf die *Primartriangulation* eines Landes, auf die *Orientierung des Dreiecknetzes*, Bestimmung der *Lage von Basel*, die *secundären* und *tertiären* Triangulationen, das Aufnahmeverfahren zu sprechen.

Der II. Teil beschlägt die im *Sommer 1813 vorzunehmenden Arbeiten;* H. will die Bestimmungen wegen der Kleinheit seines Instruments unabhängig kontrollieren, dazu hat er eine dreifache Reihe von Dreiecken entworfen, die er in einer beigegebenen Zeichnung durch blaue, schwarze und rothe Linien unterscheidet. Da die Primartriangulation die Grundlage des ganzen Werkes ist, so wird er keine Mühe scheuen, sie möglichst genau zu machen und sie im Sommer 1813 zu vollenden trachten.

III. Teil handelt von den zum Werke *nötigen Einrichtungen* und *Hülfsmitteln.*

1. wurde die Frage aufgeworfen, ob ihm ein Gehülfe zu geben sei; er wünscht keinen, da er an einsames Arbeiten gewöhnt sei.
2. Jedem, der sich für das Werk interessiert, werde er gerne Auskunft geben.
3. Ein Gehülfe wird bei der spätern Triangulation allerdings nothwendig sein.
4. Zwei Träger für den Transport der Instrumente genügen.
5. Für die Instrumente werde er schon aus Interesse, Bürgersinn und vieljähriger Uebung grosse Sorge tragen, dies sei die einzige Garantie, die er geben könne.

6. Von den Beobachtungen werde er eine Copie ins Depot liefern.
7. Alle auf das Land, seine physische Beschaffenheit und Landwirthschaft bezüglichen Bemerkungen werde er der Regierung mittheilen.
8. Das ganze Werk übernehme er ohne Honorar, hingegen wünsche er vergütet die Auslagen
   1. für Errichtung der Signale;
   2. für den Transport der Instrumente;
   3. für Reise und Verköstigung;
   4. für kleine Entschädigungen an die Landeigenthümer; grössere werde er stets vorher dem Rathe vorbringen;
   5. für Verbesserungen an den Instrumenten.

   Es sollte hierüber ein Budget aufgestellt werden.

Anschliessend daran liegt eine Notiz folgenden Inhalts bei den Akten:

Von Solothurn und Aargau wünscht er:

1. einen Pass mit Empfehlung an die hohen und niedern Behörden der an Basel angrenzenden Theile;
2. von Solothurn allein die Erlaubniss zur Errichtung von Signalen auf der mittäglichen Seite der Gempenfluh und des Passwang. Es sollten 4seitige Steinpyramiden von 4 Fuss Seite und 8 Fuss Höhe errichtet werden.
3. Von Solothurn, dass auf Dürren-Eck oder Bölchenfluh, auf Geissfluh bei Oltingen einige Bäume gefällt werden dürften, um einen freien Blick nach den Kantonen Basel und Bern zu erhalten;
4. dass von Solothurn ein Befehl ausgehe, die Signale zu respectiren, hauptsächlich für die Gemeinde Gempen, Dornach, Hobel, Mümliswyl, Berkiswyl, Instwald, Iffenthal, Hauenstein, Wiesen, Rohr, Kuenburg bei der Geissfluh.

Basel, Mai 28., 1813.

Dazu kommt noch ein weiterer *Nachtrag zu den Freitags angegebenen Noten.*

Im Schreiben von Solothurn möge man bemerken, dass die Standpunkte Gempenfluh und Passwang besonders geeignet seien,

den Kanton Basel zu vermessen, und der Passwang nötig sei für die Verbindung mit der Vermessung des Kantons Bern.

Es könnte sonst der Regierung von Solothurn kurios vorkommen, dass man, um Basel zu vermessen, auf ihrem Gebiet Signale nothwendig habe.

Montags, 1813, Mai 31.

Bericht über die im Jahre 1813 die Vermessung des Kantons Basel vorgenommenen Vorrichtungen.

Nachdem unter dem 23. Dezember 1812 der Kantonsrat der löblichen Haushaltung den Kredit zur Anschaffung eines Theodolits bewilligt hatte, bestellte H. nach einer Rücksprache mit Staatsrat *Stehlin* das Instrument bei den Herren *Baumann* und *Kinzelbach* in Stuttgart. Ueber das Instrument korrespondierte er mit Hofrat *Wild* in Müllheim. Ende April war Oberst *J. H. Weiss* bei ihm, der darüber klagte, dass das Signal auf dem Wiesenberg schon mehrmals umgeworfen worden sei; H. versprach, es wieder aufrichten zu lassen. Andere Geschäfte und schlechtes Wetter waren den Arbeiten hinderlich. Das Signal auf dem Wiesenberg wurde auf Anordnung des Statthalters vom Bezirk Sissach aufgestellt und so an vielen andern Punkten auch. H. entwickelte grossen Fleiss, z. B. an einem Vormittag hielt H. die Dekanatsrede, am Nachmittag war er schon wieder auf Exkursionen. Am 15. Juli wurde der Theodolit von Stuttgart eingeliefert. So gings bis 1. October.

Basel, 1814, Juli 7.

Von den Behörden des Kantons Aargau wurde ihm jeglicher Schutz zugesichert (Anhang Nr. 5, 6 und 7). Dasselbe geschah von Seiten Solothurns (Anhang Nr. 8, 9, 10). Im Staatsarchiv finden sich eine Reihe von Berichten und Rechnungen über die 1813—24. Von besonderm Interesse ist eine Eingabe vom 15. März 1815, die wir in extenso aufführen.

Hochgeachter Herr Präsident,
Hochgeachte, Hochzuverehrende Herren!

Zur Beförderung der mit Anfangs der schönen Jahreszeit wieder zu beginnender Operationen, die trigonometrische Vermessung des Cantons betreffend, gebe ich hiermit die Ehre folgende zwey Vorschläge zu thun.

I.

Wenn ich in dem, Einer Hochlöblichen Haushaltung vor zwey Jahren eingegebenen Plane zur Unternehmung dieser Vermessung mich geäussert hatte, dass man der Messung einer Basis überhoben seyn könnte, wenn man das Dreyeck System *unsers Cantons* mit dem des *Kantons Bern* verbinden könnte, so hatte ich dabey hauptsächlich öconomische Betrachtungen berücksichtiget, wenn es mir gleich lieber gewesen wäre, auch für unsre Dreyeck Reihe eine besondere Basis zu messen, welches in mehreren Rücksichten vortheilhaft wäre.

Auch würden die Unkosten nicht *so* beträchtlich seyn, dass der Staat dieselben, wenn es auch nur der Ehre halber wäre, die Messung des Cantons unabhängig für sich unternehmen zu können, nicht über sich nehmen könnte. Es wird aber die Messung einer Basis noch wünschenswerther, wenn eine allgemeine Cadastrirung des Kantons näher seyn sollte, als es bey Unternehmung der Messung des Ganzen zu Anfang das Ansehen hatte.

Für unsern Canton zu vermessen ist eine kleine Basis von 3000 bis 7000 Schuhen hinreichend, wenn die Messung genau unternommen wird. Diese Genauigkeit könnte einigermassen mit tannenen Messstangen, aber doch weit besser mit einer grossen Messkette erhalten werden. Ausser dem nämlich, dass man bey der Messung mit hölzernen Stangen verschiedenen kleinen Fehlern unterworfen ist, ist die Operation mit einer Kette viel geschwinder vollendet, und erfordert nicht so viele Zurüstungen als bey jenen. Es wäre beydes hier auseinander zu setzen viel zu weitläuffig, ich bin es aber auf besonderes Begehren erbötig zu thun.

Eine solche Messkette muss sich aber von den gewöhnlichen Feldmesser Ketten in mehrerem unterscheiden, und kömmt daher ziemlich hoch zu stehen; deswegen ich eben, ehe ich dieselbe ausfertigen liesse, meinen Hochgeachten Herren Anzeige davon zu thun mich verpflichtet erachtet.

Sie muss erstlich eine beträchtliche Länge haben. Hundert Fuss ist das eben rechte Maass. Zweitens darf sie nicht nur aus dickem Eisendrath, sondern aus Stahl bestehen, der auf einen gewissen Grad gehärtnet ist. Drittens können die Glieder nicht nur durch Ringe an einander hängen, sondern sie müssen durch genau gearbeitete charnieres mit einander verbunden seyn.

Unser Herr Mechanicus *Ecklin* wäre im Stande eine solche Kette vortrefflich auszufertigen. Ich habe mit ihm vorläuffig darüber gesprochen. Er glaubt, Er könne sie um 100 franken liefern; ich muss aber gestehen, ich glaube, er würde wohl so viele Arbeit daran haben, dass sie auf 100 Basel Pfunde würde zu stehen kommen. Da ich Herr *Ecklin* immer sehr billig gefunden habe, so glaube ich, wäre es besser, ihn erst nach vollendeter Arbeit den Preis bestimmen zu lassen, als vorher mit ihm zu acordiren.

Es ergeht also hiermit meine geziemende Bitte an meine Hochgeachten Herren dahin: zu Anschaffung einer solchen Messkette die Erlaubniss zu ertheilen. Wenn die Anschaffung von Messstangen sich nicht so hoch belaufen würde, so gewinnt man, da eine Messung vermittels einer Kette mit mehr Beförderung und weit weniger Apparat und Zurüstungen zu Stande gebracht werden kann, auf dieser Seite wieder einen beträchtlichen Theil des Ueberschusses.

Eine genaue Messkette würde übrigens nicht nur zunächst für diese Vermessungen die trefflichsten Dienste leisten, sondern auch in der Folge zu jeder genau zu unternehmenden Messung zu gebrauchen seyn.

II.

Wenn die Triangulation des Cantons beendigt ist, so ist dann die Aufnahme der Details ein Geschäft, das nicht Monate, sondern Jahre erfordert; besonders, wenn zu einer Cadastrirung auch der kleinste Detail soll aufgenommen werden. Es ist daher von der grössten Wichtigkeit, dass wenigstens die Punkte der Primar Triangulation so bestimmt werden können, dass sie immer, wenn auch die Signale verunglücken sollten, wieder leicht können aufgefunden werden, da die Aufnahme der Details die Kenntniss jener Punkte immer voraussetzt.

Ich habe zwar, zur Wiederauffindung der Mittelpunkte der bestehenden Signale Alignement mit benachbarten Gegenständen, Bäumen, u. d. g. nehmen lassen, oder auf andere Weise dafür gesorgt; doch war ich mit diesen Versicherungen nicht ganz zufrieden, und vernahm daher vor einigen Wochen mit Vergnügen von Herrn Inspector *Laroche* einen hierher gehörigen

Vorschlag, der mir sehr zweckdienlich scheint, und den ich deswegen meinen Hochgeachten Herren hiermit vorlege, um von Hochdenselben zu vernehmen, ob Sie ihn zu genehmigen erachten.

Dieser Vorschlag besteht darin: in den Mittelpunkt der Signale von den *E. Gescheiden* der betreffenden Höhe Steine setzen zu lassen. Ein solcher Stein müsste nirgends hinweisen, aber doch genugsam bezeichnet werden, dass das Gescheid ihn immer für einen von Ihnen gesetzten Stein erkennen würde. Auch müsste ein jeder mit einer bestimmten Nummer bezeichnet, und in das Gescheids Protokoll eingetragen werden. Die Fälle sind *Gottlob* bey uns noch sehr selten, wo Marchsteine nicht respectirt werden, und wie ein solcher würden unsere Signal-Steine gewiss auch vor muthwilliger Beschädigung gesichert bleiben.

Solcher zu bestimmender und zu verwahrender Punkte möchten sich etwa 20 bis 25 erfinden. An den Stellen, welche hart an den Gränzen des Cantons liegen, möchten solche Steinsetzungen vielleicht nicht thunlich seyn. An solchen Orten muss man dann entweder einen Stein etwas weiter von den Gränzen wegsetzen, und dessen Lage auf das genaueste gegen den Mittelpunkt des Signales bestimmen, oder je nach Beschaffenheit des Locales auf andere Mittel bedacht seyn.

Sollte der Vorschlag von meinen Hochgeachten Herren genehmigt werden: so wünsche ich eine besondere Erlaubniss deshalb zu erhalten, welche ich den Herren Bezirksstatthaltern vorweisen könnte, um durch dieselben die betreffenden Gescheide in jedem benöthigten Falle requiriren zu können.

Dieses wären die beyden Vorschläge. Uebrigens verharre ich mit ausgezeichneter Hochachtung

Hochgeachter Herr Präsident,
Hochgeachte Herren

Dero Ergebenster

Dan. Huber, Prof. Math.

Basel, 1815 März 15.

Ueber den Verlauf der ganzen Unternehmung und ihre Resultate geben wir nun Huber selbst, nach dem eingangserwähnten Manuscript, das Wort.

Versuch einer trigonometrischen Vermessung des Kantons Basel.

Von **Daniel Huber**, Prof. Math.

1824.

Einleitung.

In der Einleitung entschuldigt sich H., dass die Dreiecksvermessung weder bezüglich der Genauigkeit noch der Vollständigkeit die Vollendung habe, die er gern gewünscht und gehofft hätte. Die *Gründe* hiefür seien:

1. Die sehr beschränkte Zeit. H. konnte daher nicht so viele Winkel messen, als ihm notwendig schien; auf einige Punkte musste er sogar Verzicht leisten.

2. Das *Instrument:* ein sechszölliges *Theodolith* von *Baumann,* einem ausgezeichneten Mechaniker in Stuttgart. Dasselbe besass nicht den höchsten Grad der Vollkommenheit; daher fasste er den Plan, durch viele Beobachtungen den Mangel ihrer Genauigkeit zu ersetzen.

Die Methode sollte von der bisherigen verschieden sein; den Plan dazu hatte H. schon vor 26 Jahren gefasst. Die gewöhnliche Methode beruht darauf: Man geht von einer Basis aus, an welche man Dreiecke so legt, dass jeder Punkt von zwei andern bestimmt wird. Dazu wären bloss zwei Winkel nötig; um aber eine Verifikation zu haben, misst man alle drei.

Seine Methode besteht darin: die Bestimmung eines jeden Punktes soll auf die Lage mehrerer anderer begründet werden, d. h. auf jeder Station sind so viele Winkel als möglich zu messen, um viele Vergleichungen zu haben. Er suchte ein Hauptdreieck, das fast den ganzen damaligen Kanton einschliessen würde, so genau zu bestimmen, dass man alle andern Punkte dann darauf beruhen lassen kann. Er nahm als Fundamentaldreieck: *Basel-Wiesenberg-Passwang* und sah, dass dieses Dreieck durch die Beobachtungen mit dem Theodolithen von Baumann nicht genug bestimmt sei. Deshalb trachtete er die Bestimmung mit dem *Reichenbach'schen* Kreise, einem 1817 von Reichenbach um 900 fl. ge-

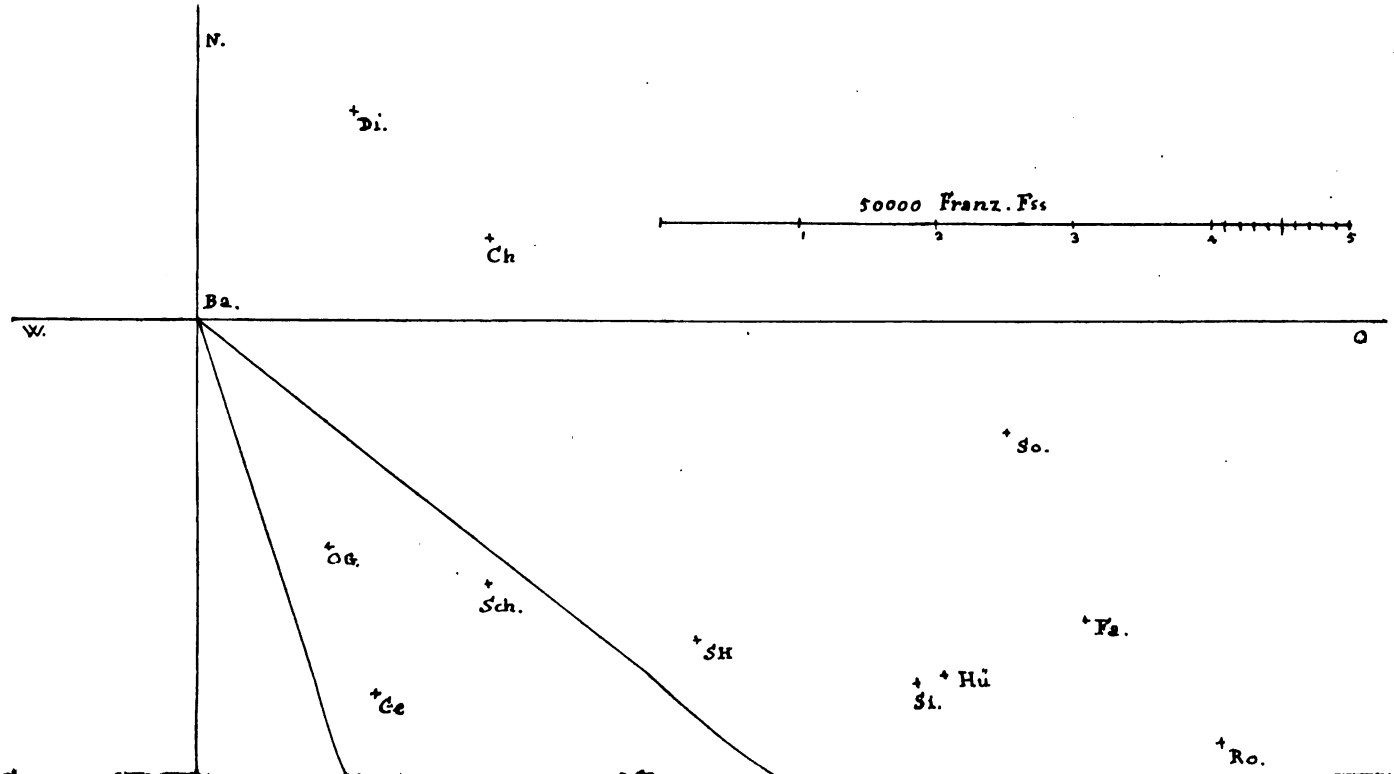
kauften 12zölligen Kreis von Borda zu verifizieren. Das kostbare, eigentlich zu astronomischen Zwecken bestimmte Instrument musste aber dadurch den Gefahren des Transportes ausgesetzt werden; trotz dieses Bedenkens that Huber es aber doch, und mass aus Gründen der Genauigkeit ebenfalls bei Stationen in der Nähe der Stadt, wie auf der *Chrischona,* bei *Schauenburg* und *Scheurhalden* mit diesem Reichenbach'schen Instrument Winkel.

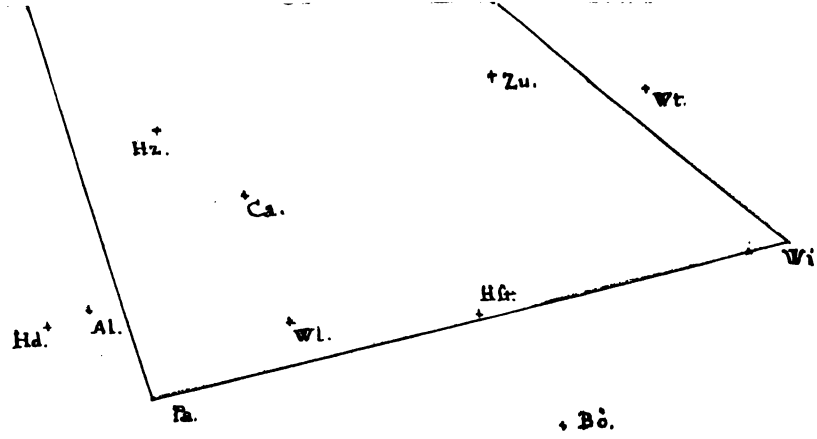
Die Lage der andern Punkte konnte er sodann durch Coordinaten auf den *Meridian von Basel* bestimmen. Um also einen Punkt aus andern herzuleiten, wurden zuerst aus einem Dreieck die Coordinaten desselben vorläufig bestimmt. Diese vorläufigen Coordinaten wurden mit den definitiven Coordinaten anderer Punkte, die vorher schon bestimmt waren, verglichen resp. die Winkel berechnet und diese mit den beobachteten Winkeln verglichen, die Abweichung mit ihrem Vorzeichen angemerkt. Hierauf wurde untersucht, welche Veränderungen von den angenommenen vorläufigen Coordinaten vorzunehmen wären, um die sämtlichen bemerkten Abweichungen so klein als möglich zu machen, und die sonach veränderten Coordinaten wurden alsdann als die definitive Bestimmung des fraglichen Punktes angesehen.

Huber hatte versucht, die vorzunehmenden Veränderungen mit der Methode der kleinsten Quadrate zu bestimmen[1]), sie führe aber zu weitläufigen Rechnungen, wo leicht Fehler unterlaufen können, darum zog H. vor, jene vorzunehmenden Veränderungen durch Versuche empirisch nach und nach auszumitteln, eine Methode, welche Resultate ergab, die von denjenigen durch die andern Methoden erhaltenen, nur durch Fraktionen von Fussen sich unterscheiden.

Ausser der Unvollkommenheit des Instruments, bemerkt H., kann es noch andere Fehlerquellen geben: da hinzu kommen die *Gestalt einiger Signale,* wie z. B. auf dem *Sonnenberg, Scheurhalden, Hühnersedel,* wo die Signale Bäume sind, welche von der senkrechten wie auch von der regelmässigen Figur abweichen, ferner das *Wechseln der Signale*[2]), weil sie von Bauern oder durch Mutwillen zerstört und dann nicht exakt an gleicher Stelle wieder errichtet werden können, endlich die *Excentricität* der Beobach-

[1]) Dies um so eher, als er eigentlich der Entdecker dieser Methode ist.
[2]) Welchen Einfluss dies hatte, vgl. Graf, Gesch. d. Dufourkarte, S. 22.


N.
Di.
50000 Franz. Fss
1
2
3
4
5
Ch
Ba.
W.
O
So.
Og.
Sch.
Fa.
SH
Hü
Si.
Ce
Ro.



Die Dreieckspunkte im trigonometrischen Netze von Prof. Daniel Huber.

tungen, welche an den meisten Orten durch die Lokalitäten verursacht werden und bei welchen die nötigen Dimensionen nicht immer genau genug bestimmt werden konnten.

H. tröstet sich aber damit, dass in den meisten Fällen die Beobachtungsfehler sich kompensieren werden und sagt: «ich «sollte nicht glauben, dass in den Coordinaten sich irgendwo ein «Fehler befinde, der über 2 oder 3 Fuss ist. Es ist dies zwar «keine grosse Genauigkeit, aber doch hinreichend für den Zweck, «wesswegen hauptsächlich diese Triangulation unternommen wor- «den ist, dass sie nämlich zur Begründung einer *Kadastervermessung* diene.»

I.

Kurze Bezeichnung der 25 Punkte des Dreiecksystems.

(Mit ihren Abkürzungen.)

Ba. 1. Pkt. *Basel:* Der südöstliche Münsterthurm, der sogenannte *Martins*thurm. Auf dem obersten Boden ward die Mitte des Achtecks innen gemessen und als senkrecht unter der Mitte des Thurmknopfs angenommen.

Wi. 2. » *Wiesenberg*[1]*):* Ein Signal auf dem höchsten Punkt, das mehrmals neu errichtet werden musste.

Pa. 3. » *Passwang:* Ein Signal auf dem höchsten Punkt.

Ge. 4. » *Gempenfluh:* Ein Signal auf dem Vorsprung der Gempen- oder Schartenfluh, die Aussicht reicht nicht bis *Basel,* man musste deshalb eine Strasse durch das Gebüsch und den Holzwuchs durchhauen. Das Signal auf Felsen gestellt, wurde oftmals umgeworfen, ist daher wohl nicht immer an gleicher Stelle errichtet.

Ch. 5. » *Chrischona:* Die Spitze des südlichen Giebels des Sattelthurms.

Sch. 6. » *Schauenburg:* Die Windfahne des Hrn. Dr. Merian zustehenden Pavillons auf den Ruinen des Schlosses.

So. 7. » *Sonnenberg:* Eine noch nicht alte Eiche auf dem höchsten Teile des Berges gegen W., unfern eines grossen «Bahnsteines» auf der Grenze gegen Riehen.

Bö. 8. » *Bölchenfluh:* Ein kleines Signal, in den letzten Jahren vom Sturm gefällt, das Mittel hat man noch finden und bewahren können.

---

[1]) Vergl. Geschichte der Dufourkarte, S. 31.

Si. 9. Pkt. *Sissachfluh:* Ein zweimal wieder hergestelltes Signal, gerade über der Fluh.

Se. 10. » *Seltisberg:* Auf dem Gilmshügel oder Kapf in der Nähe des Dorfes Seltisberg, wo man vor einigen Jahren Gräber gefunden hat.

Hst. 11. » *Hohe Stelle:* Ein Signal auf der höchsten Stelle dieses Berges.

Hd. 12. » *Heidenstadt:* Das Signal steht nicht mehr, das Centrum ist mit einem Steine versichert.

Wl. 13. » *Wyl:* Ein Signal auf der Gagsen, nicht weit vom Gagsen-Gatter.

Hz. 14. » *Holzenberg:* Ein Signal fast zuoberst, Holzwuchs hinderte die Aussicht gegen die Reigoldswyler Berge; seit zwei Jahren ist sie offen.

Al. 15. » *Aleten:* Ein Signal am Rande der Aleten-Weide.

Ca. 16. » *Castelenfluh:* Ein Signal gegen S.-W.

SH. 17. » *Scheurhalden:* Eine Föhre, deren unterste Äste abgestutzt sind, auf der roten Fluh des Berges.

Wt. 18. » *Wytisburg:* Ein Signal auf der hohen Ebene, welche auf der Aegerte genannt wird.

Ro. 19. » *Rothenfluh:* Ein Signal auf der Fluh.

Gf. 20. » *Geissfluh:* Ein Signal auf der Fluh.

Fa. 21. » *Farnsberg:* Ein Signal auf einer die Ruine des Schlosses dominierenden Höhe, nicht weit von einem grossen Marchstein.

Hü. 22. » *Hühnersedel:* Eine Föhre.

Zu. 23. » *Zunzger Höhe:* Ein Signal zwischen Höllstein und Zunzgen, unweit eines Gutes, Hofgarten genannt.

Og. 24. » *Obergurth:* Die westliche Giebelspitze des kleinen, etwas vom Hause entfernt stehenden Cabinets.

Di. 25. » *Dillingen:* Die südliche Giebelspitze des Thurmes.

II.

Verzeichnis der gemessenen Winkel.

Alle Beobachtungen, auch die zweifelhaften, sind darin angegeben: die Nummer der Beobachtung nach dem chronologischen Beobachtungsjournal,

die Zeit des Beobachtens,
die Angabe des Winkels,
die 5. Colonne enthält die Anzahl der Wiederholungen,
die letzte Colonne die Bemerkungen.

Die Winkelangaben gehen bis auf Zehntelssekunden; H. ist jedoch weit entfernt, den Beobachtungen diese Genauigkeit zuzuschreiben, er wäre sehr zufrieden, wenn er auf eine Genauigkeit von Zehntelsminuten rechnen könnte.

Alle Winkel sind auf den Mittelpunkt der Station und den Horizont reduziert, alles werde doppelt gerechnet.

Fast alle Beobachtungen sind mit dem 6-zölligen Theodolit von *Baumann* in Stuttgart gemacht worden, einige mit dem 12-zölligen *Reichenbach'schen* Repetitionskreis, dieselben sind durch ein beigesetztes R charakterisiert. Einen einzigen Winkel hat er mit einem 9-zölligen Reflexions-Sextanten von *Troughton* gemessen; er ist mit S bezeichnet. (Stat. Basel Nr. 265).

Der Theodolit hat gute Fernröhren, sie sind astronomisch und vergrössern 18 Mal. Im ersten Jahre waren terrestrische daran, die nur $10^1/_2$ Mal vergrösserten. An der Einteilung ist nicht viel auszusetzen, jedoch sind eine Instabilität des Versicherungsfernrohrs und dessen unvollkommene Verbindung mit dem Limbus hauptsächlich Ursache, dass mit dem so schön und gut gearbeiteten Instrument keine sehr genauen Beobachtungen angestellt werden können. Beim Winkelmessen befolgte H. immer die Maxime, besonders diejenigen Winkel zu messen, wo die Objekte wegen günstiger Beleuchtung und andern Umständen besonders deutlich waren, und dies besonders in den ersten Jahren wegen der geringen Vergrösserung. Verschiedene Winkel sind wiederholt zu verschiedenen Zeiten gemessen worden, was oft beträchtliche Differenzen ergab.

Huber führt folgende Messungen an, welche in dieser Beziehung beträchtliche Differenzen erzeigen, nämlich:

			Nummern der Beobachtungen	Zahl der Wiederholungen				Differenz
Sch.	Wi.	Fa.	4	5	48°	40′	32″,9	14″,3
			8	8	48	40	18,6	
Hst.	Wi.	Ge.	12	6	38	38	32,4	17,2
			13[a]	6	38	38	49,6	
Ge.	Bö.	Se.	27	7	13	09	50,0	15,4
			37	12	13	10	05,4	
Ch.	Pa.	Wi.	129	15	76	15	03,7	19,2
			131	9	76	15	22,9	
Se.	Bö.	Si.	28	13	32	59	09,6	22,7
			160	11	32	58	46,9	
Ch.	Pa.	Si.	128	15	39	43	15,4	23,4
			135	7	39	42	52,0	
Wi.	Se.	Bö.	52	5	30	41	23,6	22,9
			79	4	30	41	00,7	41,0
			75	1	30	41	41,7	19,6
			82	6	30	41	22,1	
Wi.	Hz.	Hst.	92	12	19	24	02,0	18,1
			94	55	19	24	20,1	
Si.	Al.	Ch.	110[a]	8	44	39	16,9	16,9
			111	10	44	39	33,8	
Wi.	Gf.	Si.	215	8	51	22	30,3	14,9
			218	4	51	22	45,2	

Die Differenzen sind in der That bedeutend, von 14″,3 bis 23″,4, ja einmal bei Wiesenberg-Seltisberg-Bölchenfluh 41″,0. Bei Bestimmung des Mittels ist nicht nur das arithmetische Mittel genommen, sondern jeder Beobachtung ist ein um so grösserer Werth gegeben worden, je mehr Wiederholungen der Bestimmung stattfanden. Z. B. wenn die eine Messung 5, die andere 8 Mal wiederholt worden war, so ist der Werth derselben im Verhältniss von 9 zu 12 genommen worden.

Die Zuverlässigkeit der Resultate wächst in einem kleinern Verhältnisse als die Anzahl der angestellten Messungen angeben, wenn bei einem Instrument durch dessen Konstruktion Fehler veranlasst werden, welche mehrstentheils auf die gleiche Seite fallen. Daher hat H. auch später weniger Wiederholungen gemacht, da er die Fehler des Instruments besser kannte; den Beobachtungen des ersten Jahres hat er wegen der Unvollkommenheit der Fernröhren einen um den fünften Theil geringeren Werth beigemessen.

In der ersten Diskussion der $\sphericalangle$ hat H. 36 Dreiecke erhalten, in welchen alle 3 mit dem Theodolith gemessen waren. Nur 4 zeigten in der Summe kleine Excesse über 180° nämlich 0,5″, 1″,7, 1″,6, 0″,4; die übrigen 32 lieferten Defekte unter 180°, das Mittel aus allen 36 $\triangle$ gab einen mittlern Defekt pro $\triangle$ von 33″,3, auf einen $\measuredangle$ 11″,1.

Hieraus folgte, dass das Instrument sämmtliche Winkel zu klein angab, dass alle Winkel einer Verbesserung bedurften. Wie ist nun diese Korrektion anzubringen?

Die zwei einfachsten Voraussetzungen waren:

1° alle gemessenen $\sphericalangle$ müssen um 11″,1 vermehrt werden,

2° die anzuwendende Korrektion ist dem gemessenen $\sphericalangle$ proportional, so dass z. B. wenn a der gemessene $\measuredangle$ ist, man $\frac{11{,}1 \cdot a}{60.}$ als positive Korrektion hat.

In der Ungewissheit, welche Annahme die richtige sei, hat H. beide zur Hälfte wirken lassen, also den $\sphericalangle$ nach der Korrektion $5''{,}55 + \frac{a \cdot 5''{,}55}{60}$ vergrössert und dafür eine kleine Tafel entworfen.

A enthält die Korrektion von 10 zu 10°.
B die Proportionalteile für einzelne Grade.

A.		B.	
0°	5″,55	1°	0″,09
10°	6,47	2°	0,18
20°	7,40	3°	0,27
30°	8,22	4°	0,37
40°	9,25	5°	0,46
50°	10,17	6°	0,55
60°	11,10	7°	0,65
70°	12,02	8°	0,74
80°	12,95	9°	0,83
90°	13,87	10°	0,92
100°	14,80		
110°	15,72		
120°	15,65		
130°	17,57		
140°	18,50		
150°	19,42		

Nach dieser Tabelle sind sämtliche Theodolitbeobachtungen von H. korrigiert worden.

Station Basel.

Münster, St. Martinsthurm.

68.β	1816. April 16.	Chrischona, Wiesenberg.	53°. 43′. 28″,7	6	
68.γ	— — — — —	Chrischona, Schauenburg.	58. 00. 25,2	2	
68.δ	— — April 18.	Chrischona, Gempenfluh.	80. 15. 45,6	4	
68.ε	— — — — —	Chrischona, Schauenburg.	58. 00. 24,7	2	
151,6	1817. Juni 20.	Wiesenberg, Passwang.	33. 56. 06,5	16	Objekte zitternd und schwach.
153	— — Juni 21.	Chrischona, Schauenburg.	58. 00. 09,2	18	
155	— — Juni 24.	Chrischona, Wiesenberg.	53. 43. 06,0	10	Wiestenberg schwach.
157	— — Juni 25.	Chrischona, Ober-Gruth.	75. 16. 20,1	7	Regen, der zuletzt zum Aufhören zwang.
158	— — Aug. 20.	Wiesenberg, Passwang.	33. 55. 52,6	12	Signale schwach.
159	— — — — —	Gempenfluh, Passwang.	7. 23. 55,2	3	
219	1818. Sept. 5.	Chrischona, Gempenfluh.	80. 15. 34,8	R. 10	
220	— — — — —	Wiesenberg, Passwang.	33. 56. 18,9	R. 12	
221	— — — — —	Wiesenberg, Gempenfluh.	26. 32. 17,7	R. 10	
222	— — — — —	Bölchen im Schwarzwald, Wiesenberg.	96. 38. 54,2	R. 14	
250	1818. Okt. 16.	Hühnersedel, Passwang.	46. 37. 07,8	R. 10	Signale schwach, bes. Hühnersedel.
251	— — — — —	Sonnenberg, Passwang.	64. 10. 35,3	R. 6	Einige Ungewissheit wegen eines kleinen, vor dem Stamm d. Signal-Eiche stehenden Baumastes, d. Beobachtung ist in der Folge weggelassen worden.

252	— — — — —	Wiesenberg, Heidenstatt.	39°.	07′.	07″,3	R. 8.	Heidenst. Signal sehr schwach, wegen schwacher Beleuchtung, so dass man nicht einmal wegen des Gegenstandes gewiss war.
253	— — — — —	Chrischona, Schauenburg.	58.	00.	11,2	R. 6	
254	— — Okt. 17.	Dillingen, Schauenburg.	93.	12.	17,5	7	
255	1818. Okt. 17.	Chrischona, Ober-Gruth.	75.	16.	01,5	7	
256	1819. Mai 12.	Wiesenberg, Heidenstatt.	39,	07.	20,5	R. 6	Beide Signale schwach.
257	— — — — —	Wiesenberg, Passwang.	33.	56.	16,4	R. 10	
258	— — Mai 19.	Chrischona, Schauenburg.	58.	00.	18,0	8	
259	— — — — —	Chrischona, Ober-Gruth.	75.	16.	03,5	7	
261	— — — — —	Dillingen, Chrischona.	35.	12.	20,9	8	
262	— — — — —	Dillingen, Schauenburg.	93.	12.	16,2	3	Schauenburg sehr schwach.
265	— — Aug. 24.	Chrischona, Ober-Gruth.	75.	16.	12,1	S. 5	
302	1821. Nov. 19.	Wiesenberg, Passwang.	33.	56.	14,2	R. 6	
324	1823. Okt. 24.	Sonnenberg, Passwang.	64.	10.	40,9	R. 8	
325	— — — — —	Sonnenberg, Schauenburg.	34.	31.	15,9	R. 6	

Mittlere Winkel, aus vorigen.

ε	— — — — —	Chrischona, Wiesenberg.	53.	43.	15,5	— —	68 β. 155.
ζ	— — — — —	Chrischona. Schauenburg.	58.	00.	15,6	— —	68 γ. 68 ε. 153. 258.

$\zeta\zeta$	— — — — —	Wiesenberg. Passwang,	53°. 56′. 00″,3	— —	151b. 158.
ι^3	— — — — —	Wiesenberg, Passwang.	33. 56. 17,2	— —	220 R. 257 R. 302 R.
$\varkappa^2$	— — — — —	Sonnenberg, Passwang.	64. 10. 38,1	— —	251 R. 324 R.
ζ^3	— — — — —	Chrischona, Ober-Gruth.	75. 16. 09,9	— —	157. 255. 259. 265 S.
η^3	— — — — —	Dillingen, Schauenburg.	93. 12. 17,0	— —	254. 262.
Θ^3	— — — — —	Dillingen, Schauenburg.	93. 12. 23,1	— —	η^3. (261+ζ)

Station Wiesenberg.

1	1813. Aug. 20.	Bölchenfluh, Passwang.	25°. 06′. 21″,4	10	Gewitter zwang die Station zu verlassen.
2	1813. Aug. 26.	Bölchenfluh, Passwang.	25. 06. 13,5	16	Sehr starker Wind.
3	— — — — —	Bölchenfluh, Schauenburg.	75. 12. 41,9	14	Ebenso.
4	— — Aug. 27.	Schauenburg, Farnsberg.	48. 40. 32,9	5	
5	— — — — —	Basel, Farnsberg.	46. 33. 16,1	20	
6	— — — — —	Basel, Farnsberg.	46. 33. 12,2	7	
7	— — — — —	Bölchenfluh, Gempenfluh.	64. 31. 59,8	15	
8	— — Aug. 28.	Schauenburg, Farnsberg.	48. 40. 18,6	8	
9	— — — — —	Bölchenfluh, Gempenfluh.	64. 31. 49,6	6	
10	— — — — —	Bölchenfluh, Basel.	77. 19. 44,4	18	
11	— — — — —	Gempenfluh, Chrischona.	25. 59. 21,9	17	Chrischona meistens schwach.

12	— — — — —	Hohestelle, Gempenfluh.	38°.	38′.	32″,4	6	
13a	— — — 30.	Hohestelle, Gempenfluh.	38.	38.	49,6	6	
13b	— — — — —	Hohestelle, Gempenfluh.	38.	38.	41,2	5	
14	— — — — —	Passwang, Basel.	52.	13.	31,5	16	Basel schwach.
15	— — — — —	Passwang, Chrischona.	65.	24.	54,6	11	
16	— — — — —	Hohestelle, Sissachfluh.	73.	49.	19,1	15	Sissach Signal etwas schief.
17	— — — — —	Bölchenfluh, Seltisberg.	67.	47.	27,9	7	
202	1818. Aug. 25.	Passwang, Basel.	52.	13.	05,0	10	
203	— — — — —	Bölchenfluh, Passwang.	25.	06.	17,1	6	
204	— — — — —	Bölchenfluh, Gempenfluh.	64.	32.	00,5	6	
205	— — — — —	Passwang, Seltisberg.	42.	40.	21,7	6	
206	1818. Aug. 25.	Wytisburg, Sissachfluh.	15.	20.	29,0	5	
207	— — — — —	Wytisburg, Rothenfluh.	61.	55.	29,5	5	
208	— — — — —	Passwang, Sissachfluh.	74.	36.	10,2	7	
209	— — — — —	Hohestelle, Sissachfluh.	73.	49.	24,0	6	
210	— — — — —	Seltisberg, Scheurhalden.	14.	51.	40,0	5	
211	— — — — —	Sissachfluh, Geissfluh.	100.	31.	27,0	5	
212	— — — — —	Farnsberg, Geissfluh.	76.	21.	19,6	5	
213	— — — — —	Rothenfluh, Geissfluh.	53.	56.	48,4	5	

307	1822. Aug. 8.	Passwang, Schauenburg.	50°. 06′. 00″,0	R. 6	
308	— — — — —	Passwang, Gempenfluh.	39. 25. 26.3	R. 6	
309	— — — — —	Passwang, Sissachfluh.	74. 36. 22,3	R. 8	Beide Signale schwach.
310	— — — — —	Passwang, Basel.	52. 13. 02,5	R. 8	Münster Basel immer schwach.
311	— — — — —	Passwang, Basel.	52. 13. 10,9	R. 8	Ebenso.
312	— — — — —	Passwang, Chrischona.	65. 24. 37,8	R. 8	Beide Signale schwach.
313	— — — — —	Passwang, Basel.	52. 13. 11,5	R. 8	Basel schwach.

Mittlere Winkel, aus vorigen.

β	— — — — —	Bölchenfluh, Gempenfluh.	64. 31. 57,6	— —	7. 9. 204.
η	— — — — —	Schauenburg, Farnsberg.	48. 40. 24,2	— —	4. 8.
Θ	— — — — —	Basel, Farnsberg,	46. 33. 14,9	— —	5. 6.
ι	— — — — —	Bölchenfluh, Passwang.	25. 06. 16,8	— —	1. 2. 203.
ν	— — — — —	Passwang, Basel.	52. 13. 08,3	— —	R. 310. R. 311. R. 313.
x	— — — — —	Hohestelle, Gempenfluh.	38. 38. 41,1	— —	12. 13.[a] 13.[b]
ψ	— — — — —	Hohestelle, Sissachfluh.	73. 49. 21,0	— —	16. 209.
$\varkappa^3$	— — — — —	Passwang, Basel.	52. 13. 19,2	— —	14. 202.
λ^3	— — — — —	Passwang, Basel.	52. 13. 22,9	— —	$\varkappa^3$. (11—ι^3).

Station Passwang.

38	1813. Sept. 17.	Chrischona, Bölchenfluh.	94°. 00′. 21″,1	18	Chrisch. zu Ende d. Reihe schwach.
39	— — — — —	Schauenburg, Bölchenfluh.	93. 32. 25,1	19	
40	— — — 29.	Basel, Wiesenberg.	93. 51. 22,5	5	
41	— — — — —	Wiesenberg, Bölchenfluh.	17. 44. 47,2	4	
42	— — Okt. 1.	Gempenfluh, Wiesenberg.	88. 04. 43,5	8	Signale schwach Regen.
124	1816. Sept. 13.	Basel, Wiesenberg.	93. 50. 00,5	11	Basel u. Wiestenberg schwach.
125	— — — — —	Chrischona, Sissachfluh.	39. 43. 03,2	8	Signale schwach.
126	— — — — —	Aleten, Seltisberg.	53. 47. 23,5	5	
127	— — Sept. 14.	Basel, Chrischona.	17. 35. 04,0	15	
128	— — — — —	Chrischona, Sissachfluh.	39. 43. 15,4	15	
129	— — — — —	Chrischona, Wiesenberg.	76. 15. 03,7	15	
130	— — — — —	Wiesenberg, Bölchenfluh.	17. 44. 37,4	18	
131	— — — 16.	Chrischona, Wiesenberg.	76. 15. 22,9	9	
133	— — — — —	Basel, Chrischona.	17. 35. 05,5	9	
134	— — — — —	Gempenfluh, Chrischona.	11. 49. 07,4	20	
135	— — — — —	Chrischona, Sissachfluh.	39. 42. 52,0	7	
303	1822. Aug. 6.	Basel, Wiesenberg.	93. 50. 25,6	R. 4	
304	— — — — —	Basel, Wiesenberg.	93. 50. 32,0	R. 6	

Station Passwang.

305	1822. Aug. 6.	Basel, Wiesenberg.	93°. 50′. 30″,5	R. 8.	
306	— — — — —	Gempenfluh, Wiesenberg.	88. 04. 32,7	R. 4.	
		Mittlere Winkel, aus vorigen.			
γ	— — — — —	Basel, Chrischona.	17. 35. 04,6	— —	127. 132.
δ	— — — — —	Chrischona, Wiesenberg.	76. 15. 11,5	— —	129. 131.
$\varkappa$	— — — — —	Wiesenberg, Bölchenfluh.	17. 44. 39,6	— —	41. 130.
μ	— — — — —	Schauenburg, Wiesenberg.	75. 47. 40,9	— —	(39—$\varkappa$), (δ – 137)
β^2	— — — — —	Chrischona, Sissachfluh.	39. 43. 05,8	— —	125. 128. 135.
μ^3	— — — — —	Basel, Wiesenberg.	93. 50. 25,9	— —	40. 124.
ν^3	— — — — —	Basel, Wiesenberg.	93. 50. 21,7	— —	μ^3. ($\gamma+\delta$)
0^3	— — — — —	Basel, Wiesenberg.	93. 50. 29,9	— —	R. 303. R. 304. R. 305.
		Station Gempenfluh.			
68^n	1816. April 27.	Basel, Wiesenberg.	140. 39. 54,4	6	Wiesenberg schwach.
246	1818. Okt. 14.	Wiesenberg, Passwang.	52. 29. 48,7	9	
247	— — — — —	Wiesenberg, Bölchenfluh.	20. 45. 52,2	6	
248	— — — — —	Basel, Wiesenberg.	140. 39. 53,8	7	Basel schwach.
249	— — — — —	Hohestelle, Heidenstatt.	44. 39. 12,7	7	Hohestelle schwach.
		Mittlerer Winkel, aus vorigen.			
α	— — — — —	Basel, Wiesenberg.	140. 39. 54,1	— —	68 η 248.

Station Chrischona.

235	1818. Sept. 30.	Sonnenberg, Schauenburg.	69°. 02′. 45″,9	8	
236	— — — — —	Hühnersedel, Seltisberg.	31. 56. 57,0	7	Hühnersedel schwach.
237	— — — — —	Sissachfluh, Schauenburg.	43. 42. 55,1	6	
238	— — — — —	Schauenburg, Basel.	75. 35. 10,3	6	
316	1823. Aug. 23.	Schauenburg, Basel.	75. 35. 24,6	R. 8	
317	— — — — —	Sonnenberg, Schauenburg.	69. 02. 31,8	R. 8	
318	— — — — —	Wiesenberg, Passwang.	38. 19. 59,3	R. 8	
322	1823. Okt. 8.	Passwang, Basel.	74. 45. 20,7	R. 8	
323	— — — — —	Sissachfluh, Schauenburg.	43. 42. 45,3	R. 6	

Station Schauenburg.

239	1818. Okt. 13.	Basel, Chrischona.	46. 24. 31,8	8	
240	— — — — —	Basel, Dillingen.	31. 32. 02,5	5	
241	— — — — —	Chrischona, Sonnenberg.	75. 08. 47,3	5	
242	— — — — —	Sissachfluh, Seltisberg.	41. 45. 43,2	6	
243	— — — — —	Wiesenberg, Passwang.	54. 05. 59,6	8	
244	— — — — —	Sissachfluh, Bölchenfluh.	45. 04. 37,0	7	
245	— — — — —	Seltisberg, Castelenfluh.	23. 30. 39,6	5	
319	1823. Sept. 5.	Basel, Dillingen.	31. 31. 54,8	R. 8	
320	— — — — —	Basel, Chrischona.	46. 24. 35,0	R. 8	
321	— — — — —	Chrischona, Sonnenberg.	75. 08. 34,2	R. 8	

Station Sonnenberg.

229	1818.	Sept. 18.	Passwang, Basel.	63°.	43′.	41″,9	6	
230	—	— — — —	Schauenburg, Chrischona.	35.	48.	40,6	8	Schauenburg sehr schwach.

Station Bölchenfluh.

18	1813.	Sept. 1.	Gempenfluh, Chrischona.	21.	08.	57,1	6	
19	—	— — — —	Gempenfluh, Sissachfluh.	46.	09.	33,6	18	Sissach Signal etwas schief.
20	—	— — — —	Gempenfluh, Wiesenberg.	94.	42.	04,4	14	Gempenfluh schwach.
21	—	— Sept. 2.	Hohestelle, Wiesenberg.	86.	23.	04,2	14	
22	—	— — — —	Schauenburg, Sissachfluh.	34.	25.	44,4	18	Sissach Signal etwas schief.
24	—	— Sept. 3.	Gempenfluh, Chrischona.	21.	08.	57,3	12	
25	—	— — — —	Schauenburg, Farnsberg.	49.	19.	58,4	12	Signal Farnsberg etwas schief.
26	—	— Sept. 4.	Passwang, Gempenfluh.	42.	26.	34,4	12	Diese Messung konnte nur in höchst unbequemer Stellung gemacht werden.
27	—	— — — —	Gempenfluh, Seltisberg.	13.	09.	50,0	7	
28	—	— — — —	Seltisberg, Sissachfluh.	32.	59.	09,6	13	
30	—	— — — —	Gempenfluh, Wiesenberg.	94.	42.	05,6	16	Gempenfluh schwach. Sehr starker Wind.
31	—	— — — —	Seltisberg, Farnsberg.	47.	53.	38,7	10	Signal Farnsberg etwas schief.
32	—	— Sept. 14.	Passwang, Gempenfluh.	42.	26.	42,9	16	Gempenfluh schwach.
33	—	— — — —	Gempenfluh, Chrischona.	21.	08.	31,0	19	Chrischona schwach.

Station Bölchenfluh.

34	— — — — —	Gempenfluh, Farnsberg.	61°. 03′. 34″,3	13	Signal Farnsberg etwas schief.
35	— — — — —	Schauenburg, Wiesenberg.	82. 58. 05,3	15	
36	— — Sept. 15.	Sissachfluh, Wiesenberg.	48. 32. 47,6	12	Sign. Sissachfluh etwas schief.
37	— — — — —	Gempenfluh, Seltisberg.	13. 10. 05,4	12	
150	1816. Sept. 19.	Passwang, Gempenfluh.	42. 26. 43,8	2	Von Regen unterbrochen.
151a	— — — — —	Rothenfluh, Wiesenberg.	17. 40. 37,2	5	Signal Rothenfluh schwach.
160	1817. Sept. 5.	Seltisberg, Sissachfluh.	32. 58. 46,9	11	
161	— — — — —	Sissachfluh, Wiesenberg.	48. 32. 36,3	12	
162	— — — — —	Hohestelle, Seltisberg.	4. 50. 41,6	6	
163	— — — — —	Wytisburg, Wiesenberg.	37. 10. 54,8	8	
164	— — — — —	Passwang, Seltisberg.	55. 37. 06,8	11	

Mittlere Winkel, aus vorigen.

τ	— — — — —	Passwang, Gempenfluh.	42. 26. 39,9	— —	26. 32. 150.
v	— — — — —	Gempenfluh, Wiesenberg.	94. 42. 05,0	— —	20. 30.
φ	— — — — —	Gempenfluh, Chrischona.	21. 08. 44,9	— —	18. 24. 33.
γ^2	— — — — —	Sissachfluh, Wiesenberg.	48. 32. 41,3	— —	36. 161.
λ^2	— — — — —	Gempenfluh, Seltisberg.	13. 09. 58,2	— —	27. 37. (34—31)
μ^2	— — — — —	Seltisberg, Sissachfluh.	32. 58. 59,0	— —	28. 160.

Station Sissachfluh.

172	1817. Sept. 26.	Wiesenberg, Bölchenfluh.	31°. 45′. 14″,9	6	Zitternde Bilder.
188	1818. Aug. 18.	Wiesenberg, Passwang.	68. 51. 51,2	13	
189	— — — — —	Wiesenberg, Bölchenfluh.	31. 45. 14,5	5	
190	— — — — —	Wiesenberg, Zunzger Höhe.	54. 13. 09,3	5	
191	— — — — —	Wiesenberg, Hohestelle.	42. 40. 05,4	5	
192	— — — — —	Schauenburg, Chrischona.	32. 21. 07,1	5	
193	— — — — —	Wiesenberg, Wyl.	62. 44. 04,7	6	
194	1818. Aug. 18.	Wiesenberg, Wytisburg.	14. 13. 19,5	6	
195	— — — — —	Passwang, Seltisberg.	33. 17. 15,1	6	
231	— — Sept. 19.	Geisfluh, Wiesenberg.	28. 05. 54,5	7	
		Mittlerer Winkel, aus vorigen.			
ζ^4	— — — — —	Wiesenberg, Bölchenfluh.	31. 45. 14,7	— —	172. 189.

Station Seltisberg.

52	1814. Sept. 19.	Wiesenberg, Bölchenfluh.	30. 41. 23,6	5	
69	1816. Aug. 15.	Chrischona, Schauenburg.	20. 29. 49,0	6	
70	— — — — —	Chrischona, Sissachfluh.	87. 38. 17,1	12	
71	— — — — —	Sissachfluh, Wiesenberg.	45. 55. 40,0	12	
72	— — — — —	Wiesenberg, Hohestelle.	32. 23. 30,5	6	
73	— — Aug. 21.	Wiesenberg, Castelenfluh.	72. 55. 19,9	7	

Station Seltisberg.

74	— — — — —	Castelenfluh, Holzenberg.	26°.	18′.	12″,2	6	
75	— — — — —	Wiesenberg, Bölchenfluh.	30.	41.	41,7	1	Entfernt. Regen zwang die Reihe abzubrechen.
76	— — — — —	Bölchenfluh, Wyl.	30.	30.	06,0	3	Vom Regen unterbrochen.
77	— — — — —	Sissachfluh, Rothenfluh.	13.	51.	27,7	7	
78	— — — — —	Rothenfluh, Wiesenberg.	32.	04.	15,4	12	
79	— — — — —	Wiesenberg, Bölchenfluh.	30.	41.	00,7	4	Sign. undeutlich. Sehr dunkel.
80	— — — — —	Passwang, Schauenburg.	127.	04.	21,3	3	
81	— — — — —	Wiesenberg, Bölchenfluh.	30.	41.	07,0	8	
82	— — Aug. 22.	Wiesenberg, Bölchenfluh.	30.	41.	22,1	6	
83	— — — — —	Bölchenfluh, Passwang.	48.	10.	46,1	12	
84	— — — — —	Bölchenfluh, Passwang.	48.	10.	42,3	7	
85	— — — — —	Wyl, Holzenberg.	38.	01.	49,4	7	
85	— — — — —	Rothenfluh, Bölchenfluh.	62.	45.	50,9	10	
87	— — — — —	Sissachfluh, Hohestelle.	78.	19.	08,7	10	
88	— — — — —	Hühnersedel, Hohestelle.	78.	08.	21,1	7	Hühnersedel schwach.
102	— — Aug. 27.	Passwang, Aleten.	12.	31.	54,3	8	Betreffend die 8 Beob. dies. Tages siehe eine Anmerkung am Ende d. Beobachtungen dieser Station.
101	— — — — —	Passwang, Heidenstatt.	15.	52.	11,8	10	

Station Seltisberg.

103	— — — — —	Wiesenberg, Wyl.	61°. 11′. 36″,5	8	
104	— — — — —	Wiesenberg, Hohestelle.	32. 23. 23,1	4	
105	— — — — —	Zunzger Höhe, Hohestelle.	32. 50. 00,1	14	
106	— — — — —	Bölchenfluh, Passwang.	48. 10. 53,3	7	
107	— — — — —	Hohestelle, Holzenberg.	66. 49. 52,7	7	
108	— — — — —	Hohestelle, Castelenfluh.	40. 31. 57,7	6	
174	— — Aug. 8.	Scheurhalden, Sissachfluh.	43. 28. 53,7	7	Sehr unregelmässige Beobachtungsreihe.
175	— — — — —	Sissachfluh, Wiesenberg.	45. 55. 41,1	7	
176	— — — — —	Rothenfluh, Wiesenberg.	32. 04. 37,0	7	
177	— — — — —	Scheurhalden, Wyl.	150. 37. 12,6	6	
179	— — — — —	Wyl, Aletenfluh.	30. 12. 09,1	3	Aleten schwach.

Mittlere Winkel, aus den vorigen.

ν^2	— — — — —	Wiesenberg, Bölchenfluh.	30. 41. 16,6	— —	52. 75. 79. 81. 82.
ξ^2	— — — — —	Bölchenfluh, Passwang.	48. 10. 44,6	— —	83. 84.
o^2	— — — — —	Sissachfluh, Wiesenberg.	45. 55. 42,4	— —	71. 175. (77 + 78)
ϱ^2	— — — — —	Wiesenberg, Hohestelle.	32. 23. 27,6	— —	72. 104.
ν^3	— — — — —	Wiesenberg, Wyl.	61. 11. 30,9	— —	103. (ν^2 + 76)
β^3	— — — — —	Rothenfluh, Wiesenberg.	32. 04. 24,2	— —	78. 176.

Anmerkung zu den Beobachtungen. 1816. Aug. 27.

In Rücksicht der Beobachtungen dieses Tages waltet eine kleine Ungewissheit ob. Es ist nämlich im Beobachtungs-Journal nicht angezeigt, ob diese Beobachtungen im gleichen Lokale mit den nächst vorhergehenden angestellt worden seien, oder in einem andern Lokale, dessen nähere Bezeichnung vergessen worden zu bemerken. Eine Vergleichung dieser Winkel mit andern, welche auf der gleichen Station gemacht worden, gab keine Gründe an, für die Voraussetzung eines veränderten Lokales. Es sind daher diese Beobachtungen als im gleichen Lokale mit den vorigen angestellt angesehen und wie die andern in Rechnung gebracht worden, nur mit dem Unterschiede, dass denselben, der kleinen Ungewissheit wegen, nur $^4/_5$ des Wertes beigelegt worden.

Station Hohestelle.

165	1817. Sept. 6.	Seltisberg, Zunzger Höhe.	31°. 31′. 00″,2	12
166	— — — — —	Zunzger Höhe, Wiesenberg.	74. 11. 25,5	12
167	— — — — —	Heidenstatt, Gempenfluh.	46. 23. 39,0	11
168	— — — — —	Wyl, Castelenfluh.	29. 08. 18,7	7
169	— — — — —	Wyl, Sissachfluh.	105. 58. 20,9	7
170	— — — — —	Sissachfluh, Wiesenberg.	63. 30. 21,7	8
171	— — — — —	Wiesenberg, Bölchenfluh.	67. 43. 52,7	5

Station Heidenstatt.

116	1816. Sept. 11.	Basel, Wiesenberg.	95. 50. 41,8	10
117	— — — — —	Gempenfluh, Hohestelle.	88. 57. 14,9	7

Station Heidenstatt.

118	1816. Sept. 11.	Seltisberg, Aleten.	34°. 02.′ 28″,8	4	
119	— — — — —	Seltisberg. Wyl.	55. 00. 25,7	12	
120	— — — — —	Chrischona, Sissachfluh.	43. 23. 04,0	14	Sissachfluh schwach.
121	— — Sept. 13.	Basel, Wiesenberg.	95. 50. 46,1	8	
122	— — — — —	Gempenfluh, Hohestelle.	88. 56. 49,9	9	
		Mittlere Winkel, aus vorigen.			
σ^2	— — — — —	Basel, Wiesenberg.	95. 50. 43,8	— —	116. 121.
τ^2	— — — — —	Gempenfluh, Hohestelle.	88. 57. 01,4	— —	117. 122.

Station Wyl.

138	1816. Sept. 17.	Seltisberg, Sissachfluh.	33. 27. 32,0	12	
139	— — — — —	Sissachfluh, Wiesenberg.	47. 23. 29,1	14	
140	— — — — —	Wiesenberg, Hohestelle.	6. 34. 32,5	10	
141	— — — — —	Heidenstatt, Seltisberg.	91. 27. 17,7	10	
142	— — — — —	Aleten, Seltisberg.	87. 13. 00,2	7	
143	— — — — —	Holzenberg, Seltisberg.	35. 07. 16,7	7	
144	— — — — —	Castelenfluh, Seltisberg.	20. 20. 11,2	7	
145	— — — — —	Seltisberg, Scheurhalden.	8. 38. 40,1	8	Etwas zweifelhaft, weil der an der Signalfichte auf Scheurh. angebrachte Schaub nicht richtig gestellt war.

Station Holzenberg.

89	1816. Aug. 23.	Gempenfluh, Chrischona.	24°. 00′. 13″,6	10	Zitternde Bilder.
90	— — — — —	Chrischona, Sissachfluh.	59. 23. 55,2	12	
91	— — — — —	Sissachfluh, Wiesenberg.	40. 51. 31,5	12	Sissachfluh schwach.
92	— — — — —	Wiesenberg, Hohestelle.	19. 24. 02,0	12	
93	— — Aug. 24.	Sissachfluh, Wiesenberg.	40. 51. 23,4	8	
94	— — — — —	Wiesenberg, Hohestelle.	19. 24. 20,1	5	
95	— — — — —	Hohestelle, Wyl.	25. 53. 31.6	10	
96	— — — — —	Castelenfluh, Wyl.	19. 38. 02,5	6	
97	— — — — —	Wytisburg, Hohestelle.	33. 55. 58,1	10	
98	— — — — —	Hühnersedel, Hohestelle.	59. 27. 47,2	9	
99	— — — — —	Gempenfluh, Chrischona.	24. 00. 13,9	5	
100	— — — — —	Seltisberg, Sissachfluh.	20. 40. 55,9	10	
		Mittlere Winkel, aus vorigen.			
φ^2	— — — — —	Sissachfluh, Wiesenberg.	40. 51. 28,0	— —	91. 93.
$\varkappa^2$	— — — — —	Wiesenberg, Hohestelle.	19. 24. 09,8	— —	92. 94.
ψ^2	— — — — —	Gempenfluh, Chrischona.	24. 00. 17,3	— —	89. 99.

Station Aleten.

110a	1816. Sept. 3.	Chrischona, Sissachfluh.	44. 39. 16,9	8	Signale ziemlich schwach.
110b	— — — — —	Seltisberg, Wyl.	62. 35. 16,3	7	

Station Aleten.

111	— — Sept. 4.	Chrischona, Sissachfluh.	44°. 39′. 33″,8	10	Signale schwach. Regen zwang zum aufhören.
112	— — — — —	Seltisberg, Wyl.	62. 35. 05,0	4	
113	— — — — —	Gempenfluh, Wiesenberg.	90. 18. 45,4	16	
114	— — — — —	Castelenfluh, Passwang.	91. 17. 42,5	6	
115	— — — — —	Heidenstatt, Seltisberg.	142. 36. 52,9	5	
		Mittlere Winkel, aus vorigen.			
ω^2	— — — — —	Chrischona, Sissachfluh.	44. 39. 26,0	— —	110.[a] 112.
α^3	— — — — —	Seltisberg, Wyl.	62. 35. 11,5	— —	110.[b] 112.

Station Castelenfluh.

146	1816. Sept. 17.	Hohestelle, Wyl.	43. 04. 56,6	12	Diese beiden Beobachtungen sind wegen höchst unbequemer Stellung und wegen Störung von umstehenden Zuschauern etwas zweifelhaft.
147	— — — — —	Holzenberg, Seltisberg.	66. 28. 54,0	5	

Station Scheurhalden.

234	1818. Sept. 19.	Wiesenberg, Seltisberg.	75. 43. 19,7	4	Signale ziemlich schwach.
326	1824. Mai 1.	Wiesenberg, Seltisberg.	75. 43. 14,4	R. 8	
327	— — — — —	Wiesenberg, Passwang.	66. 55. 40,9	R. 6	
328	— — — — —	Seltisberg, Schauenburg.	76. 14. 05,5	R. 6	
329	— — — — —	Seltisberg, Chrischona.	122. 25. 36,2	R. 6	

Station Wytisburg.

196	1818. Aug. 24.	Sissachfluh, Wiesenberg.	150°. 26′. 15″,6	6	
197	— — — — —	Hohestelle, Holzenberg,	48. 38. 50,4	4	
198	— — — — —	Wiesenberg, Bölchenfluh.	58. 27. 26,2	3	
199	— — — — —	Wiesenberg, Passwang.	102. 40. 43,7	5	
200	— — — — —	Geissfluh, Wiesenberg,	35. 28. 39,3	7	
201	— — — — —	Rothenfluh, Geissfluh.	43. 19. 58,0	6	

Station Rothenfluh.

223	1818. Sept. 12.	Geissfluh, Wiesenberg.	49. 27. 02,0	5	
224	— — — — —	Wiesenberg, Passwang,	40. 15. 18,7	9	
225	— — — — —	Wiesenberg, Farnsberg.	113. 30. 14,9	5	

Station Geissfluh.

214 α	1818. Aug. 26.	Wiesenberg, Zunzger-Höhe.	27. 41. 49,8	2	
214 β	— — — — —	Wiesenberg, Wytisburg.	28. 39. 07,5	5	
215	— — — — —	Wiesenberg, Sissachfluh.	51. 22. 30,3	8	
216	— — — — —	Sissachfluh, Farnsberg.	18. 28. 09,6	5	
217	— — — — —	Sissachfluh, Rothenfluh.	25. 13. 18,3	6	
218	— — — — —	Wiesenberg, Sissachfluh.	51. 22. 45.2	4	Starker Wind.
		Mittlerer Winkel, aus vorigen.			
γ^8	— — — — —	Wiesenberg, Sissachfluh.	51. 22. 36,3	— —	215. 218.

Station Farnsberg.

226	1818. Sept. 12.	Geissfluh, Wiesenberg.	33°. 48′. 34″,9	7
227	— — — — —	Wiesenberg, Bölchenfluh.	22. 28. 58,9	6
228	— — — — —	Rothenfluh, Wiesenberg.	44. 05. 24,5	5

Station Hühnersedel.

232	1818. Sept. 19.	Passwang, Basel.	74. 50. 59,2	6
233	— — — — —	Seltisberg, Chrischona.	60. 14. 17,4	6

Station Zunzger-Höhe.

148	1816. Sept. 18.	Wiesenberg, Hohestelle.	63. 36. 30,1	13
149	— — — — —	Hohestelle, Seltisberg.	115. 38. 53,3	10

Station Ober-Gruth.

683	1816. April 26.	Basel, Chrischona.	57. 18. 16,6	4

Wir sehen, dass die Beobachtungen am 20. August 1813 auf dem Wiesenberg ihren Anfang nehmen und am 23. Oktober 1823 in Basel endigten.

III.

Basis des Dreiecksystems.

Um Zeit und Geldaufwand zu vermindern, nahm H. eine Seite eines Dreiecks als Basis, aus dem Dreiecksnetz französischer Ingenieure, welche in jenen Gegenden grosse Ing.-Opera-

tionen ausgeführt hatten. Seinem Ansuchen um Mitteilung einer solchen wurde anfänglich nicht genugsam entsprochen, obgleich er durch mehrere gegenseitige Mitteilungen einigen Anspruch auf Gefälligkeiten machen durfte. Z. B. von Kommandant Epailly erhielt er 1819 nur eine unvollkommene Angabe.

Als daher der bernische Ingenieur Buchwalder im Spätjahr 1821 nach Paris reiste, ersuchte H. ihn, er möchte beim Colonel *Henry*, der die Direktion der Operationen in der Schweiz und Süddeutschland gehabt hatte, um die Mitteilung der Bestimmungen des Dreiecks Bölchen-Basel-Wiesenberg einkommen und in der That konnte er sie ihm bei seiner Rückkehr von Paris am 22. März 1822 mittheilen, nämlich: *Entfernung Signal Wiesenberg vom südöstlichen Münsterturm* = 27738,83 m.

Wird nun der mètre définitif, den die Commission des poids et mesures zu 443‴,295936 bestimmt hatte (De Lambre Astron. III, p. 568) angenommen, so findet man für den Reduktions-Logarithmus der Meter auf französische Fusse 0,4883313[1]). Wird dieser zu 4,4430881, dem Logarithmus der obigen Anzahl Meter addiert, so findet man den Log. genannter Entfernung in Fussen ausgedrückt: 4,9314194, welchem die Zahl entspricht 85392,44, welche als Basis bei folgenden Rechnungen zu Grunde liegt.

Da diese Entfernung *Basel-Wiesenberg* nur vermittelst zweier Dreiecke von der grossen Basis bei Ensisheim hergeleitet worden ist, so meint H. verdiene diese Bestimmung grosses Vertrauen. Sie stimmte übrigens ziemlich mit andern überein, welche H. aus einer früher ihm mitgetheilten Reihe minder vollkommener Dreiecke hergeleitet hatte, welche 85390,9′ und 85385,5′ ergeben hatten.

Ein Zweifel, ob das jetzige Signal auf dem Wiesenberg genau an der gleichen Stelle des ehemaligen französischen Signals stehe, kann zwar demonstrativ nicht gehoben werden. Eine genaue Erwägung aller Umstände brachte aber für H. doch

[1]) Der Reduktions-Logarithmus des Meters auf Baseler Schuh zu 135″ = 0,5163599
auf Bernerschuh zu 130″ = 0,5327503
Der Reduktions-Logarithmus des Pariser Schuhs auf Baseler Fuss = 0,028287
Der Reduktions-Logarithmus des Baseler Schuhs auf den Meter = 9,4836401.

mehrere Gründe für die Annahme, dass das gegenwärtige Signal mit dem frühern übereinstimme oder nur eine ganz geringe Abweichung zeigen könne, und es kam ihm auch kein Umstand vor, der auf eine bedeutendere Abweichung mit einiger Wahrscheinlichkeit hingewiesen hätte. — Mit dieser französischen Basis von Ensisheim verhält es sich folgendermassen[1]): Sie wurde 1804 von Oberst Henry gemessen und sollte der Kartirung der Schweiz und der Erdmessung dienen. (Vgl. Nouvelle description géometrique de la France. Par H. Puissant I, p. 48). Die Länge wurde damals zu 19044,39 m gefunden. Leitet man diese Länge aus der neuen Basis bei Oberbergheim ab, welche der heutigen Triangulation in den Reichslanden zu Grunde liegt, so findet man 19044,71 m, also eine $d = + 0{,}32$ m, was für die Genauigkeit der französischen Messung sehr spricht. Die preussischen Ingenieure fanden im Jahr 1877 die Versicherungen der Endpunkte der Basis in sehr gut erhaltenem Zustande. Der nördliche Endpunkt liegt etwa 20 m von dem nördlichen Endpunkte der Oberbergheimer-Basis, und es ging 1874 der trigonometrischen Abtheilung der Vermessungs-Ingenieure der Reichslande ein Bericht des Capitaine Perrier aus dem französischen Kriegsministerium zu, der ein Auszug aus dem Memoire des Colonel Henry war: Man fing an, an den beiden Endpunkten hölzerne Pyramiden, deren Höhe 18 m, deren Seitenlänge an der Basis 6 m betrug, zu bauen. Zwei Seiten waren parallel, zwei senkrecht zur Basisrichtung. Jedes Fundament, das darunter erstellt wurde, hat 8 m^3 Inhalt und ruht auf einem Rost von Eichenholz im festen Boden. Die Mitte jedes Fundaments nimmt eine Steinplatte ein, deren obere Fläche 2 Dezimeter unter der Bodenfläche des Erdbodens liegt. In der obern Seite dieser Platte ist eine Vertiefung von 25 mm und 33 mm Seite, in welche eine achteckige Bronceplatte eingegossen wurde. In derselben ist ein Kreis und in der Mitte des Kreises ein Conus von 4,5 mm Höhe und 4 mm Basisdurchmesser. Dieser kleine Conus ist so genau als möglich in die Verlängerung der Axe des Signals gebracht und in dieser Lage vor Beginn der Messung gut befestigt worden. So wurde es auf beiden Enden der Ensisheimer

[1]) Königl. Preuss. Landestriangulation XI. Theil. Berlin, 1901. S. 133 u. s. f.

Basis gemacht. Nach der Messung wurde die Vertiefung mit gestossener Kohle ausgefüllt und auf dem Fundament eine viereckige Endpyramide von 6,09 m Höhe aus hartem röthlichem Sandstein errichtet. Auf einer der Flächen ist eine Tafel von schwarzem Marmor angebracht mit folgender Inschrift in goldenen Lettern: «Terme méridional (septentrional) d'une base de «19044 m²/₅ mesurée pour servir à la carte de l'Helvétie et à la «détermination de la grandeur et de la figure de la terre. Août «MDCCCIV».

Dieser vorzüglichen Arbeit ist alles Lob zu zollen und H. hatte sehr recht, wenn er den Bestimmungen, gestützt auf die Ensisheimerbasis alles Vertrauen entgegen brachte. —

Der folgende Theil von Hubers Manuscript handelt:

IV.

Orientierung des Dreiecksnetzes.

Ein Dreiecksnetz ist orientiert, wenn man die Lage einer Seite eines Dreiecks gegen den Meridian kennt. H. wünschte die dazu nöthigen Beobachtungen des Azimutes der Sonne, verglichen mit terrestrischen Objekten, auf dem Münsterthurme selbst anzustellen; es fehlte ihm aber eine transportable Uhr von etwelcher Genauigkeit. Da sein *Amthaus*[1]) ganz in der Nähe des Münsters lag, so stellte er Ende September 1818 in demselben Azimutal-Beobachtungen an, um sie auf den nahen Münsterthurm reduzieren zu können. Mit diesen Beobachtungen ist er aber wenig zufrieden, einmal wegen der Unbequemlichkeit des Lokals, sodann weil er selbst einen Fluss in den Augen hatte, der ihn sehr hinderte. Da aber vier verschiedene Beobachtungsserien nicht sehr abweichende Resultate ergaben und er zu andern Beobachtungen keine Zeit hatte, so begnügte er sich damit; insbesondere hielt er dieselben zu den Zwecken einer Kadastervermessung und zur Entwerfung einer vollkommenen Karte des Kantons für genügend.

[1]) Huber hat im Schönauerhof gewohnt, einem heute nicht mehr bestehenden Gebäude, an dessen Stelle heute die untere Realschule steht. Herr Prof. F. Burckhardt, dem ich diese Mitteilung bestens verdanke, glaubt, dass die Huber'sche Amtswohnung für Azimutelbeobachtungen deshalb ungeeignet gewesen sei, weil das Haus niedrig und von andern hohen Häusern umgeben war.

Das Ergebniss ist nun Folgendes:

Die Azimute sind immer vom Nordpunkt an gegen Westen gemessen worden.

I. 27. Sept. 9 Morgenbeobachtungen mit dem 9zölligen Reflexions-Sextanten von Troughton gaben als Azimut des S. Ö. Giebels des Kirchturmes zu Dillingen aus dem östlichen Dachstuhl des Amtshauses im Mittel 38° 23′ 58″,0.

II. Den 28. September gaben 8 ähnliche Beobachungen 38° 22′ 38″,6; Mittel aus beiden 38° 23′ 18″,3.

III. Den 27. September 4 Nachmittagsbeobachtungen: Das Azimut des östlichsten Gebäudes zu St. Margarethen aus einem andern Lokale meines Hauses mit dem Baumann'schen Theodoliten, woraus wieder das Azimut von Dillingen auf das vorige Lokal reduziert = 38° 24′ 22″,4.

IV. Den 28. September. 8 ähnliche Beobachtungen gaben im Mittel

38° 24′ 38″,0.

Das Mittel dieser Theodolit-Beobachtungen, indem der letzten Bestimmung wegen der doppelten Zahl der Beobachtungen auch doppelter Wert gegeben ward,

38° 24′ 32″,8

Mittel aus beiden Mitteln 38° 23′ 55″,6.

Reduktion dieses Azimuts auf das mittlere Fenster von Hubers Studierstube, aus welcher der Bölchen im Schwarzwald beobachtet werden konnte,

— 0° 02′ 25″,7

bleiben	38° 21′ 21″,9
Bölchen-Signal von Dillingen	— 7° 09′ 46″,6
Azimut vom Bölchen-Signal aus dem mittleren Fenster seiner Studierstube	31° 11′ 43″,3
Azimut Bölchen-Signal aus der Studierstube	31° 11′ 43″,3
Reduktion dieses Azimuts auf den Martinsturm des Münsters	+ 0.05 58″,7
	= 31° 17′ 42″,0
Azimut Bölchen-Signal vom Münster Angular-Entfernung des Wiesenberg-Signals vom Bölchensignal (Schwarzwald) (Beob. 222).	96° 38′ 54″,2
Azimut Wiesenberg-Signal von Basel . .	**127° 56′ 36″.**

1819 den 28. Januar erhielt H. von Kommandant Epailly die Mitteilung der Bestimmung des Azimuts *Basel-Bölchen* nach Messungen französischer Ingenieure, wahrscheinlich aus Azimutal-Beobachtungen, die zu Strassburg angestellt worden waren, hergeleitet.

Dieses Azimut vom Süd-Punkt westwärts gezählt war $234^g,773623 = 211^0\ 17'\ 46''$ und also das gleiche vom Nord-Punkt an gerechnet $31'\ 17'\ 46''$, welcher nur um $4''$ von obiger Bestimmung verschieden ist.

V.

Bestimmung der gegenseitigen Lage der 25 Punkte des Dreiecknetzes durch Coordinaten, Entfernungen und Azimute.

Nachfolgende Coordinaten sind in Beziehung auf den Meridian von Basel hergeleitet; *die Einheit ist der französische Fuss.* Die Oberfläche des Kantons, über welche sich das Dreiecknetz erstreckt, ist als eben angesehen; da nämlich die grösste Linie nicht viel über 1/4 Grad misst, so konnte H. diese Annahme machen, ohne einen merklichen Fehler zu begehen. Wenn man im grössten Dreiecke: *Basel-Wiesenberg-Passwang*, die an der Oberfläche der Erde beobachteten Winkel auf diejenigen reduzieren wollte, welche die von jedem dieser Punkte an die andern gezogenen Chorden miteinander machen, so wäre die Reduktion für jeden der drei Standpunkte — $0'',20$ — $0'',19$ — $0'',47$. Es sind dies aber Grössen, welche weit unter der Genauigkeit stehen, welcher die Winkelbeobachtungen fähig sind, so dass es übel angewandte Zeit und Mühe wäre, die Dreiecke durch ziemlich weitläufige Rechnungen auf die Oberfläche einer Kugel oder eines Sphäroids zu reduzieren.

Die *Abscissen* sind Entfernungen vom *Meridian* von Basel, die *Ordinaten* Entfernungen von der Perpendikulären dieses Meridians. Da man in Karten und Plänen immer Nord oben und Osten zur Rechten hat, so sind *östliche* Entfernungen als *positive*, *westliche* als *negative* Abscissen, ebenso nördliche Ordinaten als *positive*, südliche als *negative* angegeben.

Aus den Coordinaten sind ferner für jeden Standpunkt mehrere Entfernungen und Azimute berechnet worden. Das *Azimut* ist immer so zu verstehen, dass vom erstgenannten

Punkte der nachgenannte in dem Azimut stehe, und zwar ist es nicht *eigentliches Azimut*, das ist: Angularentfernung vom wirklichen Meridian des erstgenannten Ortes, sondern Angularentfernung von einer mit dem Meridian von Basel durch den Ort gezogenen Parallelen.

Die Azimute sind vom Nordpunkt an in der Richtung gegen Osten bis auf 360° gezählt worden. In astronomischen Rücksichten zählt man bekanntich das Azimut vom Südpunkt an, da aber in Karten und Plänen hauptsächlich der Nordpunkt berücksichtigt wird, so schien es ihm besser so.

Coordinaten der 25 Punkte.

			Entfernung vom Meridian von Basel	Entfernung von der Perpendic. des Basler Merid.
1.	Ba.	Basel	0.0	0.0
2.	Wi.	Wiesenberg	+ 67342.1	— 52506.3
3.	Pa.	Passwang	+ 21035.7	— 64289.1
4.	Ge.	Gempenfluh	+ 12853.7	— 26926.3
5.	Ch.	Chrischona	+ 20384.1	+ 5759.0
6.	Sch.	Schauenburg	+ 20975.6	— 19035.8
7.	So.	Sonnenberg	+ 58983.0	— 7978.1
8.	Bö.	Bölchenfluh	+ 50790.2	— 66094.1
9.	Si.	Sissachfluh	+ 52242.1	— 26005.7
10.	Se.	Seltisberg	+ 30832.9	— 32767.5
11.	Hst.	Hohestelle	+ 44885.3	— 57897.6
12.	Hd.	Heidenstatt	+ 13590.9	— 59186.7
13.	Wl.	Wyl	+ 31018.8	— 58619.3
14.	Hz.	Holzenberg	+ 21346.3	— 45074.6
15.	Al.	Aleten	+ 16384.5	— 58011.0
16.	Ca.	Castelenfluh	+ 27511.8	— 49366.3
17.	Sh.	Scheurhalden	+ 36152.8	— 23161.3
18.	Wt.	Wytistburg	+ 56600.8	— 41771.6
19.	Ro.	Rothenfluh	+ 74188.2	— 29983.4
20.	Gf.	Geissfluh	+ 84712.3	— 46475.9
21.	Fa.	Farnsberg	+ 64368.8	— 21624.7
22.	Hü.	Hühnersedel	+ 54056.9	— 25509.8
23.	Zu.	Zunzger Höhe	+ 45582.1	— 40592.7
24.	Og.	Ober Gruth	+ 9409.3	— 15969.4
25.	Di.	Dillingen	+ 11348.9	+ 14005.7

		Azimut			Log. der Entfernung	Entfernung
Ba.	Wi. . .	127.°	56.′	36.″,0	4.9314194	85392.4
Ba.	Pa. . .	161.	52.	54.3	4.8302234	67643.1
Wi.	Pa. . .	255.	43.	25.9	4.6792651	47782.1
Ba.	Ge. . .	154.	28.	54.	4.4747548	29837.0
Wi.	Ge. . .	295.	08.	53.	4.7795535	60194.0
Pa.	Ge. . .	347.	38.	52.	4.5826111	38248.2
Ba.	Ch. . .	74.	13.	25.	4.3259674	21182.0
Wi.	Ch. . .	321.	08.	00.5	4.8740901	74832.5
Pa.	Ch. . .	359.	28.	01.	4.8454151	70051.1
Ba.	Sch. . .	132.	13.	28.	4.4521788	28325.6
Wi.	Sch. . .	305.	49.	28.	4.7572830	57185.1
Pa.	Sch. . .	359.	55.	26.	4.6556507	45253.3
Ch.	Sch. . .	178.	38.	00.	4.3944842	24801.9
Ba.	Bö. . .	142.	27.	34.	4.9209321	83355.1
Wi.	Bö. . .	230.	37.	00.	4.3307144	21214.8
Pa.	Bö. . .	93.	28.	17.	4.4743503	29809.2
Ge.	Bö. . .	135.	54.	54.	4.7366182	54527.8
Ch.	Bö. . .	157.	03.	48.	4.8922160	78021.8
Sch.	Bö. . .	147.	38.	35.	4.7459182	55708.1
Ba.	So. . .	97.	42.	11.	4.7746637	59520.1
Pa.	So. . .	33.	58.	32.	4.8318941	67903.8
Ch.	So. . .	109.	35.	25.	4.6124714	40970.5
Sch.	So. . .	73.	46.	42.	4.5975119	39583.3
Ba.	Si. . .	116.	27.	50.	4.7660931	58357.0
Wi.	Si. . .	330.	19.	32.	4.4843097	30500.7
Pa.	Si. . .	39.	11.	06.	4.6936472	49390.9
Ch.	Si. . .	134.	54.	57.5	4.6530975	44988.1
Sch.	Si. . .	102.	34.	01.	4.5056106	32034.0
Bö.	Si. . .	2.	04.	27.	4.6033033	40114.7
Ba.	Se. . .	136.	44.	32.	4.6531461	44993.1
Wi.	Se. . .	298.	23.	53.	4.6180851	41503.5
Pa.	Se. . .	17.	15.	57.	4.5186328	33009.0

		Azimut			Log. der Entfernung	Entfernung
Ch.	Se. . .	164.°	49.′	33.″	4.6011717	39918.3
Sch.	Se. . .	144.	19.	38.	4.2279744	16903.4
Bō.	Se. . .	329.	05.	06.5	4.5893383	38845.3
Si.	Se. . .	252.	28.	19.	4.3512481	22451.6
Ba.	Hst. . .	142.	12.	55.	4.8648585	73258.6
Wi.	Hst. . .	256.	30.	01.	4.3635159	23094.9
Bō.	Hst. . .	324.	13.	49.	4.0044079	10102.0
Si.	Hst. . .	192.	59.	23.	4.5149385	32729.4
Se.	Hst. . .	150.	47.	12.	4.4592752	28792.2
Ge.	Hst. . .	134.	02.	09.	4.6489071	44556.1
Ba.	Hd. . .	167.	04.	03.	4.7833824	60727.1
Wi.	Hd. . .	262.	54.	55.	4.7337167	54164.7
Ge.	Hd. . .	178.	41.	27.	4.5087832	32268.8
Ch.	Hd. . .	185.	58.	17.	4.8149133	65300.0
Si.	Hd. . .	229.	21.	17.	4.7070604	50940.2
Se.	Hd. . .	213.	07.	47.	4.4989684	31547.7
Hst.	Hd. . .	267.	38.	28.	4.4958349	31320.9
Ba.	Wl. . .	152.	06.	51.	4.8216467	66320.3
Wi.	Wl. . .	260.	26.	49.	4.5662501	36834.1
Si.	Wl. . .	213.	03.	15.	4.5900743	38911.2
Se.	Wl. . .	179.	35.	17.	4.4125019	25852.5
Hst.	Wl. . .	267.	01.	14.	4.1425544	13885.3
Hd.	Wl. . .	88.	08.	07.	4.2414751	17437.1
Ba.	Hz. . .	154.	39.	22.	4.6978713	49873.7
Wi.	Hz. . .	279.	10.	41.	4.6683142	46592.3
Ge.	Hz. . .	154.	55.	21.	4.3018347	20037.1
Ch.	Hz. . .	178.	54.	56.	4.7062287	50842.7
Si.	Hz. . .	238.	19.	01.5	4.5599864	36306.8
Se.	Hz. . .	217.	37.	33.	4.1914226	15539.0
Hst.	Hz. . .	298.	34.	46.5	4.4282175	26805.1
Wi.	Hz. . .	324.	28.	07.	4.2212532	16643.8
Ba.	Al. . .	164.	13.	42.	4.7801762	60280.4
Wi.	Al. . .	263.	50.	04.	4.7097284	51254.1

		Azimut			Log. der Entfernung	Entfernung
Pa.	Al. . .	323.°	28.′	00.″	3.8928366	7813.3
Ge.	Al. . .	173.	31.	11.	4.4953304	31284.6
Ch.	Al. . .	183.	35.	20.	4.8054689	63895.3
Si.	Al. . .	228.	14.	56.	4.6818166	48063.6
Se.	Al. . .	209.	47.	06.5	4.4636828	29085.9
Hd.	Al. . .	67.	10.	33.5	3.4815744	3030.9
Wl.	Al. . .	272.	22.	49.	4.1657469	14646.9
Ba.	Ca. . .	150.	52.	09.	4.7521624	56514.8
Sch.	Ca. . .	167.	50.	20.	4.4917366	31026.8
Se.	Ca. . .	191.	18.	52.	4.2286002	16927.8
Hst.	Ca. . .	296.	09.	12.	4.2867959	19355.1
Wl.	Ca. . .	339.	14.	34.	3.9954289	9895.3
Al.	Ca. . .	52.	09.	24.	4.1489325	14090.7
Hz.	Ca. . .	124.	50.	28.	3.8757630	7512.1
Ba.	Sh. . .	122.	38.	44.	4.6328176	42935.6
Wi.	Sh. . .	313.	15.	18.	4.6316887	42824.1
Pa.	Sh. . .	20.	10.	54.	4.6416533	43818.1
Ch.	Sh. . .	151.	23.	55.	4.5177224	32939.9
Sch.	Sh. . .	105.	12.	25.	4.1966712	15727.9
Se.	Sh. . .	28.	58.	39.5	4.0406384	10980.9
Wl.	Sh. . .	8.	14.	19.	4.5542195	35827.7
Ba.	Wt. . .	126.	25.	39.	4.8472378	70345.7
Wi.	Wt. . .	314.	58.	57.	4.1814392	15185.9
Pa.	Wt. . .	57.	39.	38.	4.6242219	42094.2
Bö.	Wt. . .	13.	26.	10.	4.3980607	25006.9
Si.	Wt. . .	164.	32.	45.	4.2137120	16357.3
Hst.	Wt. . .	35.	59.	54.	4.2995599	19932.4
Hz.	Wt. . .	84.	38.	31.	4.5491124	35408.9
Ba.	Ro. . .	112.	00.	22.5	4.9031882	80018.1
Wi.	Ro. . .	16.	54.	26.	4.3718136	23540.4
Pa.	Ro. . .	57.	09.	40.	4.8011423	63261.9

		Azimut			Log. der Entfernung	Entfernung
Bö.	Ro. . .	32.°	56.′	29.″	4.6337563	43028.5
Se.	Ro. . .	86.	19.	33.	4.6379358	43444.6
Wt.	Ro. . .	56.	10.	03.	4.3257738	21172.6
Ba.	Gf. . .	118.	45.	02.	4.9850844	96623.9
Wi.	Gf. . .	70.	51.	16.	4.2645162	18387.2
Si.	Gf. . .	122.	13.	43.	4.5841521	38384.2
Wt.	Gf. . .	99.	30.	00.	4.4548813	28502.4
Ro.	Gf. . .	147.	27.	27.	4.2914627	19564.2
Pa.	Fa. . .	108.	34.	11.	4.8318960	67904.1
Wi.	Fa. . .	354.	30.	02.	4.4917034	31024.4
Bö.	Fa. . .	16.	58.	48.	4.6674187	46496.3
Ro.	Fa. . .	310.	24.	21.	4.1104309	12895.3
Gf.	Fa. . .	320.	41.	45.	4.5067220	32116.0
Ba.	Hü. . .	115.	15.	47.	4.7765108	59773.8
Pa.	Hü. . .	40.	24.	54.	4.7070050	50933.7
Ch.	Hü. . .	132.	52.	48.	4.6613053	45846.4
Se.	Hü. . .	72.	38.	44.	4.3861712	24331.6
Hz.	Hü. . .	59.	06.	56.	4.5810978	38115.2
Ba.	Zu. . .	131.	41.	11.	4.7855923	61036.9
Wi.	Zu. . .	298.	42.	02.5	4.3945898	24807.9
Si.	Zu. . .	204.	32.	24.	4.2050814	16035.5
Se.	Zu. . .	117.	56.	54.	4.2226256	16696.5
Hst.	Zu. . .	2.	18.	21.	4.2385209	17318.9
Ba.	Og. . .	149.	29.	35.	4.2679998	18535.3
Ch.	Og. . .	206.	47.	52.	4.3863706	24342.8
Ba.	Di. . .	39.	01.	05.	4.2559122	18026.5
Sch.	Di. . .	343.	45.	23.	4.5367518	34415.3
Ch.	Di. . .	296.	36.	40.5	4.0875281	12232.9

★ MAR 6 1939
MEDICAL LIBRARY

VI.

Vergleichung der aus den angegebenen Coordinaten berechneten Winkel mit den beobachteten.

Erstlich folgt das mit dem Reichenbach'schen Kreis gemessene Fundamental-△, das mit der Winkelsumme geprüft und dann mit Hülfe eines vierten Punktes der Gempenfluh einer genauen Prüfung unterzogen worden ist. Dann folgt die Prüfung der übrigen Punkte des △-Netzes, in der Ordnung, wie jeder Punkt aus den vorigen hergeleitet worden ist. Die beobachteten △ sind alle ohne Ausnahme verglichen. Die auf der Station Seltisberg beobachteten ∢ sind wegen einer kleinen Ungewissheit mit * bezeichnet, aber auch verglichen worden.

Je kleiner übrigens einer oder beide Schenkel eines gemessenen Winkels sind, einen um so kleineren Einfluss hat dieser Winkel auf die Bestimmung der Lage eines Punktes, so dass also in diesem Falle auch beträchtliche Abweichungen der Rechnung und der Beobachtung keine Anzeige eines grossen Fehlers in der angenommenen Lage des Punktes geben. Diese Betrachtung wird bei folgenden Bemerkungen über einige Vergleichungen, wo grössere Abweichungen vorkommen, welche ich mit ** bezeichnet habe, besonders zu statten kommen.

Seltisberg: der ∢ Pa. Se. Sch. giebt eine Abweichung von 40″. Grund: Dunkelheit verunmöglichte genaue Sicht der Signale; ferner bloss 3 Mal repetiert, dann zu grosse Nähe von Sch. an Se.

Hohe Stelle: ∢ Hst. Bö. Se. Abweichung 36″. Bö sehr nahe bei Hst; 1 Fuss giebt 20″.

Heidenstatt: Wi.-Ba.-Hd. giebt 20″ Abweichung, viel für das Instrument. Daher die Beobachtung zweifelhaft.

Holzenberg: ∢ Ge.-Hz.-Ch. weicht 39″ ab; das Signal auf der Gempenfluh musste mehrmals neu aufgerichtet werden, daher es vielleicht eine andere Stellung hatte; ferner Ge. sehr nahe bei Hz.

Aleten: ∢ Pa.-Se.-Al. Abweichung = 44″. Grund: Nähe der Standpunkte.

Castelenfluh: ∢ Ca.-Al.-Pa. Sehr grosse Abweichung 53″. Grund: grosse Nähe, grosser Elevations-∢ von Pa, was die Abweichung zum Teil erklärt.

Scheurhalden: ∢ Sh.-Se.-Si. und Sw.-Se.-Wl. weichen beträchtlich ab, 46″ und 53″. Sh und Se sind sehr nahe bei einander. Der ziemlich dicke, nicht gerade Stamm der Föhre (Signal auf Sh.), ist kein gutes Objekt für Winkelmessung. Die Reihe der Repetitionen zeigt solche Verschiedenheiten, dass Huber selbst nicht begreift, wie er sich damals hat begnügen können.

Vergleichung der aus den Coordinaten berechneten Winkel mit den gemessenen.

	Fundamental △. Beob. Winkel	Verbess. Winkel	Log. sin.	Gegenüberlieg. Seiten Log.	Zahl
Basel	33° 56′ 17″,2	33 56 18,2	9,7468685	4,6792651	47782,29
Wiesenberg	52 13 08,3	52 13 10,1	9,8978268	4,8302234	67643,08
Passwang	93 50 29,9	93 50 31,7	9,9990228	4,9314194	85392,44
	179 59 55,4	180 00 00			

Zu diesem △ sind nun Beobachtungen mit dem Vollkreise gemacht worden, an drei verschiedenen Tagen.

Das gleiche △ durch Theodolithbeobachtung bestimmt, giebt:

Basel	33° 56′ 00″,3	33 56 05	9,7468272	4,6792231	47777,3
Wiesenberg	52 13 22, 9	52 13 28	9,8978560	4,8302569	67647,5
Passwang	93 50 21, 7	93 50 27	9,9990235	4,9314194	85392,4
	179 59 44, 9	180 00 00			

Prüfung der mit dem Vollkreise gemessenen Fundamental-△s durch den Punkt Gempenfluh.

Die drei Beobachtungen des Winkels *an Basel* stimmen ziemlich überein, so dass der Winkel wenig von der Wahrheit abweichen wird. Ein Fehler kann also nur bei *Wiesenberg* und *Passwang* vorkommen, was um so wahrscheinlicher ist, da bei der Beobachtung auf diesen Punkten durch neblige Luft und ungünstige Beleuchtung die Münstertürme nicht deutlich gesehen werden konnten. Da aber die ∢

Wi.-Ba.-Ge.
Pa.-Wi.-Ge.
Ge.-Pa.-Wi.

besser beobachtet werden konnten, so bietet dies ein Mittel dar, das Fundamental-△ auf eine sichere Weise zu prüfen. Dies wird besonders noch dadurch begünstigt, dass im △ Wi.-Pa.-Ge. der ∢ am Passwang sehr wenig von einem Rechten abweicht. Wird

der ∢ an Basel als richtig vorausgesetzt, so wird die aus der Basis Wi.-Ba. berechnete Seite Wi.-Pa. sehr wenig verändert, wenn auch die ∢ an Pa. oder Wi. beträchtlich verändert werden. Die Seite Wi.-Pa. ist durch das Fundamental-△ auf alle Fälle sehr gut bestimmt, so dass auch im △ Wi.-Pa.-Ge. durch diese Seite und die beiden ∢ an Wi. und Pa. die Seite Wi.-Ge. ebenfalls als sehr gut bestimmt angesehen werden kann.

Es kann ferner im △ Ba.-Wi.-Ge. aus der Basis Ba.-Wi., der Seite Wi.-Ge. aus dem beobachteten Winkel (221) Wi.-Ba.-Ge. der ∢ Ge.-Wi.-Ba. berechnet werden. Die Rechnung giebt nun: 12° 47′ 43″,3, dazu der beobachteten ∢ (308) Pa.-Wi.-Ge = 39° 25′ 26″,3 addiert, giebt für den ∢ Pa.-Wi.-Ba. 52° 13′ 09″,6. Das Mittel der 3 Messungen dieses Winkels mit dem Vollkreise gab 52° 13′ 8″,3, weicht also bloss um 1″,3 von jener Bestimmung ab, so dass also diese beiden Resultate einander bestätigen.

---

4. Gempenfluh.

		Beobacht. Wink.	Berechn. Wink.	Diff.
Wi. Ba. Ge.	R. 221 . . .	26° 32′ 17″,7	26° 32′ 18″	0″
Wi. Ba. Ge.	68δ—68β .	26 32 16,9	26 32 18	+1
Ge. Ba. Pa.	159	7 23 55,2	7 24 00	+5
Ge. Wi. Ba.	10—β	12 47 46,8	12 47 43	—4
Pa. Wi. Ge.	R. 308 . . .	39 25 26,3	39 25 27	+1
Ge. Pa. Wi.	R. 308 . . .	88 04 32,7	88 04 34	+1
Ge. Pa. Wi.	42	88 04 43,5	88 04 34	—9
Ba. Pa. Ge.	γ—134 . . .	5 45 57,2	5 45 58	+1
Ba. Ge. Wi.	α	140 39 54,1	140 39 59	+5
Wi. Ge. Pa.	246.	52 29 48,7	52 29 59	+10

5. Chrischona.

		Beobacht. Wink.	Berechn. Wink.	Diff.
Ch. Ba. Wi.	ε	53° 43′ 15″,5	53° 43′ 11″	—4″
Ch. Ba. Ge.	R. 219 ...	80 15 34,8	80 15 29	—6
Ch. Ba. Ge.	68δ	80 15 45,6	80 15 29	—17
Pa. Wi. Ch.	R. 312 ...	65 24 37,8	65 24 35	—3
Pa. Wi. Ch.	15	65 24 54,6	65 24 35	—20
Ge. Wi. Ch.	11	25 59 21,9	25 59 07,5	—14
Ba. Pa. Ch.	γ	17 35 04,6	17 35 07	+2
Ch. Pa. Wi.	δ	76 15 11,5	76 15 25	+14
Ge. Pa. Ch.	134.....	11 49 07,4	11 49 09	+2
Wi. Ch. Pa.	R. 318 ...	38 19 59,3	38 20 01	+2
Pa. Ch. Ba.	R. 322 ...	74 45 20,7	74 45 24	+3

6. Schauenburg.

Ch. Ba. Sch.	ζ	58° 00′ 15″,6	58° 00′ 03″	—13″
Ch. Ba. Sch.	R. 253 ...	58 00 11,2	58 00 03	—8
Pa. Wi. Sch.	R. 307 ...	50 06 00,0	50 06 02	+2
Pa. Wi. Sch.	ζ—ι	50 06 25,1	50 06 02	—23
Sch. Wi. Ba.	η—Θ	2 07 09,3	2 07 08	—1
Sch. Pa. Wi.	μ	75 47 39,8	75 48 00	+20
Ba. Pa. Sch.	γ + 137 ..	18 02 41,9	18 02 32	—20
Sch. Ch. Ba.	R. 316 ...	75 35 24,6	75 35 25	0
Sch. Ch. Ba.	238	75 35 10,3	75 35 25	+15
Ch. Pa. Sch.	137	0 27 37,3	0 27 21	—16
Ba. Sch. Ch.	R. 320 ...	46 24 35,0	46 24 32	—3
Ba. Sch. Ch.	239	46 24 31,8	46 24 32	0
Wi. Sch. Pa.	243	54 05 59,6	54 05 58	—2

7. Bölchenfluh.

		Beobacht. Wink.	Berechn. Wink.	Diff.
Ba. Wi. Bö.	10	77° 19′ 44″.4	77° 19′ 36″	−8″
Pa. Wi, Bö.	λ	25 06 16,8	25 06 26	+9
Bö. Wi. Ge.	β	64 31 57,6	64 31 53	−5
Wi. Pa. Bö.	$\varkappa$	17 44 39,6	17 44 51	+11
Ch. Pa. Bö.	38	94 00 21,1	94 00 16	−5
Wi. Ge. Bö.	247	20 45 52,2	20 46 01	+9
Ge. Bö. Wi.	υ	94 42 05,0	94 42 06	+1
Pa. Bö. Ge.	τ	42 26 39,9	42 26 37	−3
Sch. Bö. Wi.	$\gamma^2 + 22$ ...	82 58 25,7	82 58 25	−1
Ge. Bö. Ch.	φ	21 08 44,9	21 08 54	+9
Ge. Bö. Sch.	34—25 ...	11 43 35,9	11 43 41	+5

8. Sonnenberg.

So. Ba. Pa.	R. $\varkappa^2$	64° 10′ 38″,1	64° 10′ 43″	+5″
So. Ba. Sch.	R. 325 ...	34 31 15,9	34 31 17	+1
So. Ch. Sch.	R. 317 ...	69 02 31,8	69 02 35	+3
So. Ch. Sch.	235	69 02 45,9	69 02 35	−11
Ch. Sch. So.	R. 321 ...	75 08 34,2	75 08 42	+8
Ch. Sch. So.	241	75 08 47,3	75 08 42	−5
Pa. So. Ba.	229	63 43 41,9	63 43 39	−3
Sch. So. Ch.	230	35 48 40,6	35 48 43	+2

9. Sissachfluh.

Pa. Wi. Si.	R. 309 ...	74° 36′ 22″,3	74° 36′ 06″	−16″
Pa. Wi. Si.	208	74 36 10,2	74 36 06	−4
Ge. Wi. Si.	$\psi - \varkappa$	35 10 39,9	35 10 39	−1
Ch. Pa. Si.	β^2	39 43 05,8	39 43 05	−1
Si. Ch. Sch.	R. 323 ...	43 42 45,3	43 43 02,5	+17
Si. Ch. Sch.	237	43 42 55,1	43 43 02,5	+7

		Beobacht. Wink.	Berechn. Wink.	Diff.
Si. Sch. Bö.	244	45 04 37,0	45 04 34	—3
Si. Bö. Wi.	γ^2	48 32 41,3	48 32 33	—8
Ge. Bö. Si.	19	46 09 33,6	46 09 33	—1
Sch. Bö. Si.	22	34 25 44,4	34 25 52	+8
Wi. Si. Pa.	188	68 51 51,2	68 51 34	—17
Wi. Si. Bö.	ξ^2	31 45 14,7	31 44 55	—20
Sch. Si. Ch.	192	32 21 07,1	32 20 56	—11
	10. Seltisberg.			
Bö. Wi. Se.	17	67° 47′ 27″,9	67° 46′ 53″	—35
Pa. Wi. Se.	205	42 40 21,7	42 40 27	+5
Ch. Pa. Se.	136	17 48 19,3	17 47 56	—23
Ge. Bö. Se.	λ^2	13 09 58,2	13 10 12	+14
Se. Bö. Si.	μ^2	32 58 59,0	32 59 20	+21
Si. Sch. Se.	242	41 45 43,2	41 45 37	—6
Pa. Si. Se.	195	33 17 15,1	33 17 13	—2
Wi. Se. Bö.	ν^2	30 41 16,6	30 41 13	—4
Bö. Se. Pa.	ξ^2	48 10 44,6	48 10 50	+5
* Bö. Se. Pa.	106	48 10 53,3	48 10 50	—3
Si. Se. Wi.	o^2	45 55 42,4	48 55 34	—8
** Pa. Se. Sch.	80	127 04 21,3	127 03 41	—40
Sch. Se. Ch.	69	20 29 49,0	20 29 55	+6
Ch. Se. Si.	70	87 38 17,1	87 38 46	+29
	11. Hohestelle.			
Hst. Wi. Ge.	χ	38° 38′ 41″,1	38° 38′ 52″	+11″
Hst. Wi. Si.	Ψ	73 49 21,0	73 49 31	+10
Hst. Bö. Wi.	21	86 23 04,2	86 23 11	+7
** Hst. Bö. Se.	162	4 50 41,6	4 51 17,5	+36
Wi. Si. Hst.	191	42 40 05,4	42 39 51	—14
Wi. Se. Hst.	ϱ^2	32 23 27,6	32 23 19	—9
Si. Se. Hst.	87	78 19 08,7	78 18 53	—16
Si. Hst. Wi.	170	63 30 21,7	63 30 38	+16
Wi. Hst. Bö.	171	67 43 52,7	67 43 48	—5
Se. Hst. Wi.	165+166 .	105 42 25,7	105 42 49	+23

12. Heidenstatt.

		Beobacht. Wink.	Berechn. Wink.	Diff.
** Wi. Ba. Hd.	R. 252 . . .	39° 07′ 07″,3	39° 07′ 27″	+20″
Wi. Ba. Hd.	R. 256 . . .	39 07 20,5	39 07 27	+6
Hst. Ge. Hd.	249	44 39 12,7	44 39 18	+5
Pa. Se. Hd.	101	15 52 11,8	15 51 50	−22
Hd. Hst. Ge.	167	46 23 39,0	46 23 41	+2
Ba. Hd. Wi.	σ^2	95 50 43,8	95 50 52	+8
Ge. Hd. Hst.	τ^2	88 57 01,4	88 57 01	0
Ch. Hd. Si.	120	43 23 04,0	43 23 00	−4
	13. Wyl.			
Wi. Si. Wl.	193	62° 44′ 04″,7	62° 43′ 43″	−22″
Wi. Se. Wl.	v^2	61 11 30,9	61 11 24	−7
Bö. Se. Wl.	76	30 30 06,0	30 30 10,5	+4
Wl. Hst. Si.	169	105 58 20,9	105 58 09	−12
Se. Hd. Wl.	119	55 00 25,7	55 00 20	−6
Se. Wl. Si.	138	33 27 32,0	33 27 58	−26
Wi. Wl. Hst.	140	6 34 32,5	6 34 25	−7
Si. Wl. Wi.	139	47 23 29,1	47 23 34	+5
Hd. Wl. Se.	141	91 27 17,7	91 97 10	−8
	14. Holzenberg.			
Wi. Se. Hz.	73+74 . .	99° 13′ 32″,1	99° 13′ 40″	+8
Wl. Se. Hz.	85	38 01 49,4	38 02 16	+27
* Hst. Se. Hz.	107	66 49 52,7	66 50 21	+28
Hz. Wl. Se.	143	35 07 16,7	35 07 10	−7
Si. Hz. Wi.	φ^2	40 51 28,0	40 51 39,5	+11
Wi. Hz. Hst.	χ^2	19 24 09,8	19 24 05,5	−4
** Ge. Hz. Ch.	ψ^2	24 00 13,7	23 59 35	−39
Ch. Hz. Si.	90	59 23 55,2	59 24 05,5	+10
Se. Hz. Si.	100	20 40 55,9	20 41 28,5	+33
Hst. Hz. Wl.	95	25 53 31,6	25 53 20,5	−11

15. Aleten.

		Beobacht. Wink.	Berechn. Wink.	Diff.
Al. Pa. Se.	126	53° 47′ 23″,5	53° 47′ 57″	+33″
** Pa. Se. Al.	102	12 31 54,3	12 31 09,5	—44
Wl. Se. Al.	179	30 12 09,1	30 11 49,5	—20
Se. Hd. Al.	118	34 02 28,8	34 02 46,5	+18
Al. Wl. Se.	142	87 13 00,2	87 12 28	—32
Ge. Al. Wi.	113	90 18 45,4	90 18 53	+8
Ch. Al. Si.	ω^2	44 39 26,0	44 39 36	+10
Hd. Al. Se.	115	142 36 52,9	142 36 33	—20
Se. Al. Wl.	α^3	62 35 11,5	62 35 42,5	+31

16. Castelenfluh.

Se. Sch. Ca.	245	23° 30′ 39″,6	23° 30′ 42″	+2″
Wi. Se. Ca.	73	72 55 19,9	72 54 59	—21
* Hst. Se. Ca.	108	40 31 57,7	40 31 40	—18
Ca. Se. Hz.	74	26 18 12,2	26 18 41	+29
Wl. Hst. Ca.	168	29 08 18,7	29 07 58	—21
Ca. Wl. Se.	144	20 20 11,2	20 20 43	+32
Ca. Hz. Wl.	96	19 38 02,5	19 37 31	—31
** Ca. Al. Pa.	114	91 17 42,5	91 18 36	+53
Hst. Ca. Wl.	146	43 04 56,6	43 05 22	+25
Hz. Ca. Se.	147	66 28 54,0	66 28 24	—30

17. Scheurhalden.

Se. W. Sh.	210	14° 51′ 40″,0	14° 51′ 25″	—15
** Sh. Se. Si.	174	43 28 53,7	43 29 39,5	+46
** Sh. Se. Wl.	177	150 37 12,6	150 36 37,5	—35
Se. Wl. Sh.	145	8 38 40,1	8 39 02	+22
Wi. Sh. Se.	234	75 43 19,7	75 43 21,5	+2
Wi. Sh. Se.	R. 326 ...	75 43 14,4	75 43 21,5	+7
Wi. Sh. Pa.	R. 327 ...	66 55 40,9	66 55 36	—5
Se. Sh. Ch.	R. 329 ...	122 25 36,2	122 25 15,5	—20
Se. Sh. Sch.	R. 328 ...	76 14 05,5	76 13 45,5	+20

18. Wytisburg.

		Beobacht. Wink.	Berechn. Wink.	Diff.
Wt. Wi. Si.	206	15° 20′ 29″,0	15° 20′ 35″	+6″
Wt. Bö. Wi.	163	37 10 54,8	37 10 50	—5
Wi. Si. Wt.	194	14 13 19,5	14 13 13	—6
Wt. Hz. Hst.	97	33 55 58,1	33 55 55,5	—3
Wi. Wt. Pa.	199	102 40 43,7	102 40 41	—3
Wi. Wt. Bö.	198	58 27 26,2	58 27 13	—13
Si. Wt. Wi.	196	150 26 15,6	150 26 12	—4
Hst. Wt. Hz.	197	48 38 50,4	48 38 50	+7

19. Rothenfluh.

Wt. Wi. Ro.	207	61° 55′ 29″,5	61° 55′ 29″	0″
Ro. Bö. Wi.	151[a]	17 40 37.2	17 40 31	—6
Ro. Se. Wi.	β^3	32 04 24,2	32 04 20	—4
Ro. Se. Bö.	86	62 45 50,9	62 45 33,5	—17
Si. Se. Ro.	77	13 51 27,7	13 51 14	—14
Wi. Ro. Pa.	224	40 15 18,7	40 15 14	—5

20. Geissfluh.

Si. Wi. Gf.	211	100° 31′ 27″,0	100° 31′ 44″	+17″
Ro. Wi. Gf.	213	53 56 48,4	53 56 50	+2
Gf. Si. Wi.	231	28 05 54,5	28 05 49	—5
Gf. Wt. Wi.	200	35 28 39,3	35 28 54	+15
Ro. Wt. Gf.	201	43 19 58,0	43 19 57	—1
Gf. Ro. Wi.	223	49 27 02,0	49 26 59	—3
Wi. Gf. Si.	γ^3	51 22 36,3	51 22 27	—9
Wi. Gf. Wt.	114β	28 39 07,5	28 38 44	—23
Si. Gf. Ro.	217	25 13 18,3	25 13 44	+26

21. Farnsberg.

		Beobacht. Wink.	Berechn. Wink.	Diff.
Ba. Wi. Fa.	Θ	46° 33′ 14″,9	46° 33′ 26″	+11″
Sch. Wi. Fa.	η	48 40 24,2	48 40 34	+10
Fa. Wi. Gf.	212	76 21 19,6	76 21 14	−6
Ge. Bö. Fa.	34	61 03 34,3	61 03 54	+20
Sch. Bö. Fa.	25	49 19 58,4	49 20 13	+15
Se. Bö. Fa.	31	47 53 38,7	47 53 41,5	+3
Wi. Ro. Fa.	225	113 30 14,9	113 29 55	−20
Si. Gf. Fa.	216	18 28 09,6	18 28 02	−8
Wi. Fa. Bö.	227	22 28 58,9	22 28 46	−13
Ro. Fa. Wi.	228	44 05 24,5	44 05 41	+16
Gf. Fa. Wi.	226	33 48 34,9	33 48 17	−18

22. Hühnersedel.

Hü. Ba. Pa.	R. 250 . . .	46° 37′ 07″,8	46° 37′ 07″	−1″
Hü. Ch. Se.	236	31 56 57,0	31 56 45	−12
Hü. Se. Hst.	88	78 08 21,1	78 08 28	+7
Hü. Hz. Hst.	98	59 27 47,2	59 27 50,5	+3
Pa. Hü. Ba.	232	74 50 59,2	74 50 53	−6
Se. Hü. Ch.	233	60 14 17,4	60 14 04	−13

23. Zunzger Höhe.

Wi. Si. Zu.	190	55° 13′ 09″,3	54° 12′ 52″	−17″
*Zu. Se. Hst.	105	32 50 00,1	32 50 18	+18
Zu. Hst. Wi.	166	74 11 25,5	74 11 40	+14
Se. Hst. Zu.	165	31 31 00,2	31 31 09	+9
Wi. Zu. Hst.	148	63 36 30,1	63 36 18,5	−12
Hst. Zu. Se.	149	115 38 53,3	115 38 33	−20

Die beiden letzten Punkte des Dreiecksystemes sind nur durch zwei beobachtete Winkel bestimmt worden.

24. Ober-Gruth.

		Beobacht. Wink.	Berechn. Wink.	Diff.
Ch. Ba. OG.	ξ^3	75° 16′ 09″,9	75° 16′ 10″	—
Ba. OG. Ch.	683	57 18 16,6	57 18 17	—
OG. Ch. Ba.	— — —	— — —	47 25 33	—

25. Dillingen.

Di. Ba. Sch.	Θ^3.	93° 12′ 23″,1	93° 12′ 23″	—
Ba. Sch. Di.	319 R . . .	31 31 54,8	31 31 55	—
Sch. Di. Ba.	— — —	— — —	55 15 42	—

Die Bestimmung der ∢ an den Punkten *Holzenberg*, *Aleten* und *Castelen* zeigen fast durchgängig mit den beobachten ∢ grosse Differenzen bis auf 50″, so dass H. selbst erklärt, er sei mit diesem △ immer am wenigsten zufrieden gewesen. Seit seinen Beobachtungen hat aber auf dem Holzenberg eine starke Abholzung stattgefunden, so dass eine Verbindung dieses Punktes mit dem Passwang möglich wurde und er ersah, dass die im vorigen Jahre zu einer sekundären Triangulation vorgenommenen Beobachtungen des Herrn Ingenieur *J. J. Frei* volles Zutrauen verdienten. Er beschloss also diese Messungen nebst den seinigen anzuwenden. Er berechnete also für diese Punkte neue Coordinate, leitete neue Azimute und Entfernungen ab. Im ganzen hat er dadurch eine grössere Übereinstimmung erreicht und er glaubt, es müssen die obigen Beobachtungen besondern Fehlern unterworfen sein, vorzüglich beim ∢ Al.-Pa-Se. Er sucht den Grund dazu beim grossen Depressions ∢, unter welchem Aleten vom Passwang aus gesehen wird, wo eine kleine Abweichung des Limbus des Instruments von der horizontalen Lage einen grossen Fehler im gemessenen ∢ mag hervorgebracht haben. Auch bei Wytisburg sind noch zwei ∢ gemessen und, gestützt auf die neuen Coordinaten, berechnet worden.

Coordinaten.

Holzenberg	+ 21348.7	— — — —	— 45074.6
Aleten	+ 16382.8	— — — —	— 58011.7
Castelenfluh	+ 27512.7	— — — —	— 49364.7

Aus diesen Coordinaten berechnete Azimute und Entfernungen.

		Azimut			Log. der Entfernung	Entfernung
Ba.	Hz. . .	154°	39′	23″	4.6978802	49874.7
Wi.	Hz. . .	279	10	43	4.6682922	46589.9
Pa.	Hz. . .	0	56	00	4.2836867	19217.0
Ge.	Hz. . .	154	54	59	4.3018564	20038.1
Ch.	Hz. . .	178	54	46	4.7062291	50842.8
Si.	Hz. . .	238	18	54	4.5599623	36304.6
Se.	Hz. . .	217	37	08	4.1913820	15537.5
Hst.	Hz. . .	298	34	55	4.4281830	26803.0
Wl.	Hz. . .	324	28	32	4.2212156	16642.4
Ba.	Al. . .	164	13	48	4.7801778	60280.6
Wi.	Al. . .	263	50	02	4.7097433	51255.8
Pa.	Al. . .	323	27	13	3.8928615	7813.8
Ge.	Al. . .	173	31	23	4.4953373	31285.1
Ch.	Al. . .	183	35	25	4.8054744	63896.1
Si.	Al. . .	228	14	59	4.6818315	48065.3
Se.	Al. . .	209	47	15	4.4637050	29087.4
Hd.	Al. . .	67	10	33	3.4813105	3029.1
Wl.	Al. . .	272	22	38	4.1657963	14648.6
Ba.	Ca. . .	150	52	03	4.7521555	56513.9
Pa.	Ca. . .	23	27	37	4.2113682	16269.3
Sch.	Ca. . .	167	50	12	4.4917173	31025.4
Se.	Ca. . .	191	18	45	4.2285554	16926.0
Hst.	Ca. . .	296	09	30	4.2867941	19355.0
Wl.	Ca. . .	339	15	03	3.9954809	9896.5
Hz.	Ca. . .	124	50	16	3.8756390	7510.0
Al.	Ca. . .	52	09	21	4.1490389	14094.1
Hz.	Wt. . .	84	38	50	4.5490830	35406.5

Vergleichung berechneter und beobachteter Winkel.

15. Aleten.

				Beobacht. Winkel			Berechn. Winkel			Differenz
	Al.	Pa.	Se.	53°	47′	23″	53°	48′	44″	+ 81″
	*Pa.	Se.	Al.	12	31	54	12	31	18	— 36
	Wl.	Se.	Al.	30	12	09	30	11	58	— 11
F.[1]	Wl.	Se.	Al.	30	12	08	30	11	58	— 10
	Se.	Hd.	Al.	34	02	29	34	02	46	+ 17
	Al.	Wl.	Se.	87	13	00	87	12	39	— 21
	Ge.	Al.	Wi.	90	18	45	90	18	39	— 6
	Ch.	Al.	Si.	44	39	26	44	39	34	+ 8
	Hd.	Al.	Se.	142	36	53	142	36	42	— 11
	Se.	Al.	Wl.	62	35	12	62	35	23	+ 11
F.	Pa.	Al.	Hd.	103	43	31	103	43	20	— 11

14. Holzenberg.

F.	Si.	Pa.	Hz.	38°	15′	00″	38°	15′	06″	+ 6″
F.	Se.	Pa.	Hz.	16	19	56	16	19	57	+ 1
F.	Pa.	Si.	Hz.	19	07	47	19	07	48	+ 1
F.	Se.	Si.	Hz.	14	09	15	14	09	25	+ 10
	Wi.	Se.	Hz.	99	13	32	99	13	15	— 17
F.	Pa.	Se.	Hz.	20	21	04	20	21	11	+ 7
	Si.	Se.	Hz.	145	09	00	145	08	49	— 11
	Wi.	Se.	Hz.	38	01	49	38	01	51	+ 2
	*Hst.	Se.	Hz.	66	49	53	66	49	56	+ 3
	Hz.	Wl.	Se.	35	07	17	35	06	45	— 32
	Si.	Hz.	Wi.	40	51	28	40	51	49	+ 21
F.	Si.	Hz.	Pa.	122	37	04	122	37	06	+ 2
	Wi.	Hz.	Hst.	19	24	10	19	24	12	+ 2
F.	Se.	Hz.	Pa.	143	18	43	143	18	52	+ 9
	Ge.	Hz.	Ch.	24	00	14	23	59	47	— 27
	Ch.	Hz.	Si.	59	23	55	59	24	08	+ 13
	Se.	Hz.	Si.	20	40	56	20	41	46	+ 50
F.	Se.	Hz.	Si.	20	41	39	20	41	46	+ 7
	Hst.	Hz.	Wl.	25	53	32	25	53	37	+ 5

[1]) Nach Beobachtungen von Frey.

16. Castelenfluh.

		Beobacht. Winkel			Berechn. Winkel			Differenz
	Se. Sch. Ca.	23°	30′	40″	23°	30′	34″	— 6″
	Wi. Se. Ca.	72	55	20	72	54	52	— 28
	*Hst. Se. Ca.	40	31	58	40	31	33	— 25
	Ca. Se. Hz.	26	18	12	26	18	23	+ 11
	Wl. Hst. Ca.	29	08	19	29	08	16	— 3
	Ca. Wl. Se.	20	20	11	20	20	14	+ 3
F.	Al. Wl. Ca.	66	51	52	66	52	25	+ 33
F.	Se. Hz. Ca.	87	12	58	87	13	08	+ 10
	Ca. Hz. Wl.	19	38	02	19	38	16	+ 14
F.	Ca. Hz. Wl.	19	38	27	19	38	16	— 11
	Ca. Al. Pa.	91	17	43	91	17	52	+ 9
F.	Ca. Al. Pa.	91	18	00	91	17	52	— 8
	Hst. Ca. Wl.	43	04	57	43	05	33	+ 36
F.	Hst. Ca. Wl.	43	05	38	43	05	33	— 5
	Hz. Ca. Se.	66	28	54	66	28	29	— 25
F.	Hz. Ca. Se.	66	28	29	66	28	29	0

18. Wytisburg.

	Wt. Hz. Hst.	33°	55′	58″	33°	56′	05″	+ 7
	Hst. Wt. Hz.	48	38	50	48	38	56	+ 6

Als erste Frucht von Huber's Triangulation ist zu erwähnen eine kleine Karte:

«Skizze des nordwestlichen Teiles des Kantons Basel, «welcher den neuen Bezirk Birseck in sich begreift. Mit Be- «nutzung vorhandener Hilfsmittel entworfen im Mai 1816. — «Gezeichnet von D. H. P. M. (Daniel Huber, Prof. Math.) Ge- «stochen von S. Gysin», ein gutes Kärtchen 26/34 cm., für welches wohl Andreas Bräm viele Zeichnungen geliefert hatte.

Schanzenherr Feer sagt darüber: «Wenn man eine Karte von «dieser Art von der ganzen Schweiz hätte, so wären wenig «Länder, welche eine bessere aufweisen könnten.» [1])

Es soll hier nicht vergessen werden, dass Huber hiefür bereits sich vorher in der Aufnahme geübt hatte; das Baudepartement Basel-Stadt besitzt einen Originalplan:

Geometrischer Grundriss eines Teiles des Birsflusses etc. Trigonometrisch und geometrisch aufgenommen durch J. J. Schäfer, D. Huber, Professor und J. M. Zeiher.

Diese kolorierte Handzeichnung stammt aus dem Jahre 1798 und misst 72 cm auf 276 cm, und ist als eine Vorarbeit zu Huber's spätern Arbeiten zu betrachten. —

Als die Triangulation Huber's dem Abschluss nahe war, trat man mit *Buchwalder* in Unterhandlung, um die Detailaufnahme vorzunehmen.

Buchwalder sandte am 3. April 1822 ein schriftliches Angebot ein und wollte die Aufnahme machen, unter der Voraussetzung, dass die Triangulation schon berechnet und genügend detailliert sei, dass ein guter Grundriss der Stadt Basel und brauchbare Grenzpläne vorhanden seien, und dass ihm von den Gemeinden die Arbeiter kostenfrei geliefert würden, um die nöthigen Waldausschnitte zu machen. Unter diesen Bedingungen anerbot er sich, die Aufnahme und das Manuscript für den Stich in 1/50000 gegen Bezahlung von 450 Louisd'or herzustellen, wünschensfalls auch den Stich durch einen Pariser Künstler, inclusive Aufsicht und Abdruck von 2000 Exemplaren für 232 Louisd'or zu besorgen.

Man fand aber die geforderten Summen zu hoch. So kam das schöne Projekt nicht zu Stande und Basel kam um die Ehre, der erste Schweizerkanton gewesen zu sein, der eine auf wissenschaftlicher Grundlage beruhende Kantonskarte erstellt hätte.

In den letzten dreissiger und dem Anfang der vierziger Jahre bearbeitete *Strasseninspektor Friedrich Baader* (1802—1867) gestützt auf die Huber'sche, sodann zum Teil auf die eidgen.

[1]) Huber erwähnt dieses Kärtchen in seinem Bericht pro 1816. Er habe es für Hrn. Pfarrer Lutz für seine Beschreibung des neuen Bezirks Birseck machen müssen, was seine Thätigkeit bis Juni 1815 sehr absorbiert habe.

Triangulation, sowie auf eigene Detailaufnahmen eine Kantonskarte[1]) von Basel in 1/25000 mit Isohypsen und Schraffuren.

Das Original und eine Reduktion in 1/50000 befinden sich auf dem Baudepartement Basel-Stadt. Von Baader selbst wurde nur ein kleiner Teil dieser Karte unter dem Titel herausgegeben: «Kanton Basel-Stadtteil, nach der eidgen. Triangulation ent-«worfen und bearbeitet im Masstabe 1/25000 von Fr. Baader, «Unterinspektor. 1838.» Die mässige Lithographie ist von N. Hosch. Ergänzungen folgten 1857 und 1858.

Schon 1836 hatte sich Dufour[2]) an Baader gewandt, um ihn zu gewinnen, von den Basler'schen Katasterplänen Reduktionen in 1/25000 zusammenzutragen. In der That waren ausser dem Plane der Stadt in 1/5000 noch Pläne der Gemeinden Klein-Hüningen, Riehen, Bettingen, Allschwil, Schönenbuch, Binningen, Bottmingen, Oberwil, Therwil, Ettingen, Pfeffingen, Aesch, Reinach, Arlesheim, Mönchenstein, Muttenz, Pratteln, Basel-Augst, Frenkendorf, Liestal, Lausen, Sissach, Böckten, Thürnen, Biel, Ittingen, Stetten, Wenzlingen, Grenzach vorhanden.

Diese Pläne sind wohl meistens gestützt auf die Huber'sche Triangulation aufgenommen worden.

Baader verpflichtete sich, Reduktionen in 1/25000 zu 20 Fr. per Gemeinde herzustellen, und zwar genau nach den Vorschriften Dufours. Schon im Dezember 1836 konnte Baader das I. Blatt, Basel-Stadt umfassend, abliefern; für den Kanton Basel-Land erhöhte er seine Forderung auf 32 Fr. per □cm in 1/25000.

Diesen Dufour'schen Auftrag hat wohl Baader benützt, um seine oben erwähnte Karte Basel-Stadtteil herzustellen.

Immerhin begegnen wir auch den Spuren der Huber'schen Triangulation im hervorragendsten Kartenwerk des Kantons, demjenigen von *Andreas Kündig: Karte vom Kanton Basel*, entworfen von Andreas Kündig, 1 : 50000, 2 Bl., jedes zu 68/40 cm. Verlag von C. Detloff, empfohlen vom hohen Regierungsrate von Basel-Land, Lithographie der Herder'schen Verlagsbuchhandlung Freiburg im Breisgau, eine jetzt noch gebrauchte Karte in Schraffenmanier.

---

[1]) Diese Karte ist betitelt: Karte der Kantone Basel-Stadt und Landschaft in 1/25000, 126/172 cm, in den Jahren 1841—45 hergestellt.

[2]) Geschichte der Dufour-Karte. S. 114.

Die Bedeutung der Huber'schen Triangulation für die schweizerische Landesvermessung ist geringer zu bewerten. Bekanntlich begann die Primordialtriangulation unter Generalquartiermeister Finsler im Jahre 1809 in der Ostschweiz. Finsler fasste den Plan, die △e der Nordostschweiz, welche bis an die Gislifluh im Kanton Aargau sich erstreckten, mit den Messungen Trechsels im Kanton Bern, Hubers im Kanton Basel, E. Osterwalds im Kanton Neuenburg, zu verbinden, wodurch er einerseits den Anschluss mit der waadtländischen Triangulation erreicht, andrerseits ein △snetz erhalten hätte, das sich über 17 Schweizerkantone erstreckt hätte.

Nach Huber's Tode setzte in Basel Hauptmann Geigy die Arbeit fort. Die erste Kommission für die schweizerische Landesaufnahme, welche sich am 4. Juni 1832 in Bern unter dem Vorsitze des Oberstquartiermeisters Ludwig Wurstemberger versammelte, beschäftigte sich auch eingehend mit der Würdigung der bisherigen im Lande vollbrachten Vermessungsarbeiten.[1]) Bezüglich der Huber'schen Triangulation des Kantons Basel ergab sich folgendes:

Sie hat mit der Buchwalder'schen des Kantons Solothurn die Linien Passwang-Wiesenberg, Passwang-Basel, Wiesenberg-Basel gemein. Wegen Veränderung der Signale auf dem Wiesenberg, Gislifluh und Passwang stehen die Huber'schen Messungen besonders mit den französischen, aber auch mit den Buchwalder'schen nicht in Einklang, und vom ganzen Basel'schen Netz ist nur der südliche Münsterturm zu Basel zuverlässig in Uebereinstimmung mit der eidgen. Vermessung. Zur Herstellung der Verbindung und Ausgleichung der Widersprüche sollen von neuem 3—4 Hauptdreiecke in den Kanton Basel hineingeworfen werden, nämlich:

Passwang-Wiesenberg-Basel,
„ „ -Sonnenberg,
„ „ -Römel, allenfalls
„ „ -Gempenfluh, durch welche dann mittelst eines konstanten Logarithmus auch die übrigen △e berücksichtigt werden könnten und so der Kanton Basel sich der eidgen. Triangulation einverleiben liesse.

[1]) Graf, Geschichte der Dufourkarte. S. 22.

Wenn daher die Huber'sche Triangulation auch für den Kanton Basel unmittelbar grosse Bedeutung erhalten hat, so ist sie in zweiter Linie für die schweizerische Landesaufnahme nicht sehr verwendbar geworden. Es rächte sich der Mangel an geeigneten Instrumenten und die Auswahl und unsichere Fixierung der Signale auf den Punkten des △snetzes in sehr erheblichem Masse. Immerhin hat Huber mit seinen geringen Hilfsmitteln zu einer Zeit Bedeutendes geleistet, wo man anderwärts noch nicht einmal an einen solchen Versuch dachte oder über den Versuch nicht hinaus kam.

In Bezug auf die rechnerische Ausgestaltung und die kritische Abwägung seiner eigenen Resultate wird er aber stets ein Muster der Gewissenhaftigkeit, der Energie und der patriotischen, selbstlosen Hingabe an die Lösung einer wichtigen kartographischen Aufgabe anerkannt werden müssen.

Die Kosten (siehe Anhang No. 11) waren ausserordentlich bescheidene. Die Gesamtausgabe betrug bis und mit 1827 28,744 Franken, 7 Batzen, 9 Rappen; bis 1824 (Huber's Schlussarbeitsjahr) bloss 12,133 Franken, 2 Batzen, 9 Rappen.

Wir sind am Schluss angelangt. Ich spreche an dieser Stelle dem eidgenössischen topographischen Bureau, Chef Herr L. Held, dem Staatsarchiv Baselstadt, Hrn. Dr. Wackernagel und Hrn. Dr. August Huber, den besten Dank für ihre persönliche Unterstützung aus.

Anhang No. 1.

Sie wissen, mein hochgeachteter und werthgeschätztester Herr Rathsherr, dass ich vorigen Herbst einen guten Theil unseres Basel-gebiets in der Höhe und Tiefe besucht. Mein vornehmster Zweck war eine geometrische Rekognoszirung desselben, die Aufsuchung von Stellen, die sich für Standpunkte einer trigonometrischen Vermessung eigneten. Diesen Winter durch hat sich nun die Lust zu einem ähnlichen Versuche nicht wenig erhöht; ich habe manche vorläufige Entwürfe zur Ausführung desselben nach einer zweckmässigen Methode gemacht, die ersten Tage dieses Frühlings von neuem zu möglichst sorgfältigsten Messungen angewendet, und durch freundschaftliche Mittheilung des franz. Ingenieurs, die für eine solche Arbeit höchst wichtig sein könnte, haben brieflich jenes Projekt noch mehr zu einer Lieblingsidee erhoben.

Zwar sollten manche Schwierigkeiten mich abschrecken und namentlich die Instrumente, die mir zu Gebote stehen, denn jene Ingenieurs, sowie die Berner und Zürcher arbeiten nur mit 10- und 20mal theuern. Indessen glaube ich, dass auch mit mittelmässigen bei Anwendung grosser Genauigkeit so viel geleistet werden kann, als zu einer Messung erforderlich ist, die als Basis eine so genaue Karte unseres Kantons, und durch diese wieder zur Basis künftiger Kadastervermessungen dienen könnte. Auf jeden Fall würden ähnlichen Vermessungen von sehr grossem Nutzen für jede künftige als Vorarbeit sein und viele Kosten und Zeit ersparen.

Eine andere Schwierigkeit liegt aber darin: Jede solide Messung muss in eine grosse Triangularmessung ausgehen, welche die Hauptpunkte des ganzen Kantons fixirt. Diese Punkte können für unsern Kanton, der ziemlich gebirgig ist, nur Berghöhen sein. Kirchthürme etc. etc. können daher bei dieser ersten Arbeit nirgends beinahe als Signale dienen, es müssen solche express an ausgewählten Standpunkten errichtet werden. Diese Errichtung würde aber nicht nur mir als Partikular diese Liebhaberei um ein bedeutendes vertheuern, sondern sie würde mir als solchem beinahe unausführbar sein. Eine höhere Autorität nur kann sie erhalten und zumal schützen vor boshaften Verletzungen.

Mein lebhafter Wunsch, den ich Ihnen, verehrtester Herr Rathsherr, anempfehlen möchte, geht daher dahin: Die Regierung möchte sich für meine Arbeit einigermassen interessiren und zwar dadurch:

1. Dass Sie mich gleichsam zu den nöthigen Vermessungen autorisirte.
2. Das Sie mich begewältigte, die Gemeinden zu den erforderlichen Signalen anzuhalten und mir in meiner Arbeit den gehörigen Vorschub zu leisten.
3. Das Sie gütigst diejenigen Kosten übernähme, welche die Errichtung der Signale und fremde Hülfe beim Transport der Instrumente erfordert.
4. Dass Sie mir diejenigen Hülfsmittel, die bereits vorhanden sind, gütigst anzeigt und zu gebrauchen erlaubt (als Instrumente, Pläne, Karten etc.), und im Fall man geneigt wäre etwas zur öffentlichen Anschaffung von guten Instrumenten beizutragen, dass wo möglich zu meinem Gebrauche bereits dieselbe befördert werde.

Würde eine Hochlöbl. Regierung meinen geziemenden Wunsch mir gewähren, so machte ich mich anheischig nicht nur jedem dazu Beauftragten meine Arbeit und den Plan derselben zur Einsicht und Prüfung vorzulegen, sondern auch alle Beobachtungen, die ich mit Hülfe jener Signale machte zu jedem künftigen Gebrauch mitzutheilen. So viel verspreche ich als Verpflichtung, Allein ich hoffe ungleich mehreres und für das Allgemeine Nützliche thun zu können. Wie sehr mir eine solche Unterstützung und Begünstigung Aufmunterung und Anfeuerung sein würde, werden Sie mir zutrauen. Ich hoffte wirklich so weit zu kommen, mit der Zeit selbst eine alle bisherigen weit übertreffende, genaue, geometrische Carte zu liefern, in der alle Gebirgszüge, die in der Brucknerschen und Meyerschen so ganz fehlerhaft sind, richtig dargestellt wären — ich hoffte wenigstens so weit zu kommen, ein Netz zu entwerfen — das, wenn ich es auch nicht ganz ausführen könnte, da ich meine Musse nicht berechnen kann, von grosser Wichtigkeit für jede künftige Arbeit dieser Art sein könnte. Ich würde diese Gemeinnützigkeit um so viel mehr erhöhen, da ich meine Exkursionen nebenbei recht eifrig zur Bestimmung der Höhen — (Bewantniss) und zur Erforschung der Naturmerkwürdigkeiten anwenden würde.

Ich schmeichle mir aber einigermassen mit der frohen Hoffnung, die Theilnahme unserer Regierung an dieser Arbeit zu gewinnen — da die Kosten in der That nicht bedeutend wären — die Anzahl der Signale setze ich auf höchstens 15 oder 20; und alle Kosten auf höchstens 40 Ld'or, wenn ich allfalls anzuschaffende Instrumente fürs erste nicht in Betracht ziehe.

Jede Arbeit, die aber einst zu unternehmen wäre um das als Vorabeit zu ersetzen, was die meine zum wenigsten gewiss leistete, würde weit mehr kosten, da ich natürlich alle Privatkosten durchaus auf mich nehme, und mit dem Eifer eines Liebhabers arbeitete.

Es würde mir sehr erfreulich sein, wenn Sie mein Hochgeehrter Herr Rathsherr die Gewogenheit hätten, diesen Gegenstand zu überdenken, und nach Gutheissung höhern Orts zur Sprache zu bringen und zwar mit Beschleunigung, da ich ungern diese Sommermonate verstreichen lasse ohne beträchtlich vorzuschreiten.

Mit ausgezeichneter Hochachtung

Ihr gehorsamster

C. Bernoulli.

Basel, d. 5. Juni 1812.

Anhang Nr. 2.

Extractus Raths Protocolli vom 24. Juny 1812.

Eingezogen.

Schon seit vorigem Sommer beschäftigt sich Herr Doctor Bernoulli, jünger, mit trigonometrischen Vermessungen in dem hiesigen Canton, welche sowohl die Erhaltung einer sorgfältigen und richtigen Carte beabsichtigen, als auch zu einer allgemeinen Cadastrirung desselben dienen können.

Zu weiterer Beförderung dieser gemeinnützigen Arbeiten bedarf H. Bernoulli einer Authorisation von höherem Ort, sowie eine Obrigkeitliche Unterstützung für die Errichtung der Signale, und Kosten Ersatz wegen dem Transport der Instrumente etc. wohl angewandt seyn würde. Es sollte demnach Löbl. Haushaltung beauftragt werden, den Herrn Bernoulli näher über sein Vorhaben zu vernehmen, und demselben die gewünschte Hülfe angedeihen zu lassen. wird

erkannt.

Soll nach diesem Einzug verfahren, und zu diesem Ende Löbl Haushaltung der angerathene Auftrag ertheilt werden.

Kanzley des Kantons Basel.

Anhang Nr. 3.

Hochgeachteter, insbesondere Hochzuverehrender Herr!

Nach den aufmunternden Gesinnungen, die Sie mir letzthin mitzutheilen die Gewogenheit hatten, habe ich nicht ermangelt über die Weise nachzusinnen, den zweckmässigsten Gebrauch von

dem gütigen Vorschuss zu machen, dessen ich mich von Seite unserer Hochlöbl. Regierung zur Beförderung meiner Messungen erfreuen darf. Ich habe nicht ermangelt, die Herren Rathherr Finsler und Präsident Escher über diese Angelegenheit zu berathen. Auch ihre Unterredung hat mich aber immer mehr als erstes Bedürfniss vor allem die Acquisition eines guten Instrumentes einsehen lassen, ohne welches sich leider alle anzuwendende Kosten und Mühe wenig belohnen würde.

Das einzige genaue Instrument, das sich hier vorfinden dürfte, ist ein englischer Sextant, den kürzlich die philosophische Fakultät anschafte. Abgesehen aber, dass dieser schwer zu erhalten wäre, und Herr Prof. D. Huber ihn zu astronomischen Beobachtungen braucht, so dürfte derselbe auch nach H^{n} Finler's Ausspruch wenig für die vorzunehmenden Messungen zu wünschen seyn. Unser Canton, zumal als ein gebirgichter, würde Messungen mit Sextanten sehr erschweren, es würden zudem mehrere und kostbarere Signale nöthig seyn, weil die Einrichtung des Instruments an sich deutlichere Objekte verlangt — zudem läuft es bei öftern Reisen eher Gefahr beschädigt zu werden, und früher oder später vorzunehmende Landvermessungen würden stets ein anderes genaues Instrument erheischen.

Ein solches Instrument, das zu meinem Zweck so wie zu j e d e m, der terrestrische Messungen zum Gegenstand hat, seit langem als das bei weitem vorzüglichste anerkannt ist, ist ein sogenannter Theodolit. Obschon für diese und ähnliche Arbeiten eben nicht einer der vorzüglichsten und namentlich ein Reichenbach'scher vonnöthen ist, so sollte er dennoch aus den Werkstätten eines der geschicktesten Mechanikers — aus Stuttgardt, Darmstadt — oder wenigstens aus Zürich (von Oery) bestellt werden. Ein solches unter sorgfältigen Händen stets vortreffliches Instrument, würde an 20—30 Ld'or zu stehen kommen. Die Anschaffung eines solchen Instruments, welches fürs erste zu meinen Messungen mir gütigst anvertraut würde, ist nun der Wunsch, den ich Ihnen, Hochgeachteter Herr Dreierherr, und durch Sie einer Hochlöbl. Haushaltung geziemendst vorzutragen die Freiheit nehme — mit der Bitte sogar die Bestellung sobald möglich machen zu dürfen, damit noch diesen Herbst zu Arbeiten geschritten werden könnte.

Vielleicht dürfte ich um so eher die Willfahrung dieses Wunsches hoffen, da ein solches Instrument einen bleibenden Werth hat, keineswegs blos auf Kosten meiner Arbeit zu schreiben wäre, indem ich die Integrität garantirte; dabei aber wirklich in meinen vorläufig geäuffneten Unkosten begriffen ist. Ich sprach bereits von

ca. 50 Ld'or — die Unkosten der Signale etc. würden aber für das 1te und vielleicht 2te Jahr zusammen schwerlich die Summe von 25 Ld'or erreichen.

Mit der ausgezeichnetsten Hochachtung verharre
Meines hochgeachtetsten Herrn
Gehorsamster
Dr. *C. Bernoulli.*

Basel, den 27ten Juny 1812.

Anhang Nr. 4.

Hochgeachter Herr Praesident!
Hochgeachte, hochgeehrte Herren!

In Antwort auf Hochdero vom 20sten July 1812 datirte und uns vorgelegte Frage, was für mathematische Instrumente bey unsrer Universität vorhanden seyn, welche dem Herrn C. Bernoulli zur Beförderung seiner in unserm vaterländischen Kanton vorzunehmenden trigonometrischen Messungen dienen könnten, folgt hier ein von Hrn. Dr. Daniel Huber dem Professor der Mathesis mit vielem Fleisse ausgefertigter und die ganze Wichtigkeit dieses Gegenstandes in das helleste Licht stellender Bericht.

Hiemit verharre hochachtungsvoll
Prof. *Hieron. Kœnig;*
p. t. Academiae Rector.

1812
d. 25sten July.

Anhang Nr. 5.

Aarau, d. 8ten Brachmonat 1813.

Präsident und Rath des Kantons Aargau
an
Bürgermeister und Rath des Kantons Basel.

Getreue Liebe Eid- und Bundsgenossen!

Wir vernemmen aus Ihrer verehrten Zuschrift vom 1ten diss, dass Herr Professor Huber von Basel Willens sey, trigonometrische Vermessungen in Ihrem Canton vorzunemmen, und ihm von Ihnen durch ein Patent die allfällig zu Ausführung seines Vorhabens erforderliche Handbietung und Schutz der Beamten Ihres Cantons zugesichert worden sey; da nun derselbe in den Fall kommen könnte,

auch innerhalb der Grenzen Unseres Cantons seine Arbeiten vornemmen, und Signale aufstellen zu müssen, so entsprechen Wir mit Vergnügen Ihrem Uns geäusserten Wunsch durch Bewilligung beyliegenden Patents, Kraft dessen Herr Professor Huber bey seinen vorhabenden Arbeiten in Unserm Canton wie in dem Ihrigen finden wird.

Wir ersuchen Sie Getreue Liebe Eid- und Bundsgenossen, ihm dasselbige zu seinem Behelf zustellen zu lassen, und übrigens in allen Anlassen Unserer Bereitwilligkeit zu jeder von Uns abhängenden Gefälligkeit sich versichert zu halten.

Womit Wir Sie G. L. E. und Bundsgenossen nebst Uns der himmlischen Obsorge bestens empfehlen.

Der Präsident des Kleinen Raths
Weissenbach.

Der Staatsschreiber
Kasthofer.

Anhang Nr. 6.

Copia.

Wir Präsident und Rath des Cantons Aargau
thun kund hiemit,

Dass wir auf die Empfehlung der Regierung löbl. Standes Basel, in der Absicht dem Herrn Professor Huber von Basel, welcher Vorhabens ist, in dortigem Canton trygonometrische Vermessungen anzustellen, und dabey in den Fall kommen dürfte, innert den Grenzen des hiesigen einige Arbeiten vorzunemmen, die nöthige Sicherheit zu ungehinderter und ruhiger Vollziehung dieses Unternehmens zu verschaffen.

verordnet.

1. Es solle dem Herrn Professor Huber, bey seinem Vorhaben in Unserem Canton kein Hinderniss in den Weg gelegt und seine aufgestellten Signale unverletzt erhalten werden.
hingegen sind

2. Alle unsere Beamte und Vorgesetzte der betreffenden Gemeinden Unserer Grenzbezirke Aarau, Laufenburg und Rheinfelden, aufgefordert, demselben alle benöthigte Unterstützung und Vorschub zu leisten.

3. Gegenwärtiges Patent soll dem Hn Oberamtmann desjenigen der Oberwähnten Bezirke, in welchem Herr Huber seine Vermessungen vornemmen will, vorgewiesen, und mit desselben visum versehen werden.

Gegeben in Aarau d. 8. Juny 1813.

Der Präsident des Kleinen Raths
sig. *Weyssenbach.*

Der Staatsschreiber
sig. *Kasthofer.*

Anhang Nr. 7.

Extractus Raths Protocolli vom 12. Juny 1813.

Auf ein Antwortschreiben von Löbl. Cantons Regierung Aargau, wegen H. Professor Hubers trigonometrischer Ausmessung des hiesigen Cantons ward

Soll die willfährige Entsprechung der Regierung des Cantons Aargau höflich verdankt, und soll dieses Schreiben Löbl. Haushaltung zu handen des H. Professor Huber zugestellt werden.

Canzlei des Cantons Basel.

Anhang No. 8.

Trigonometrische Ausmessung des Cantons.

Finanz Rath in Solothurn den 21. Juny 1813.

Es hat unsere Regierung Ihrem hohen Stand von dem Vorhaben Hn Daniel Huber Professor der Mathematik auf unserer Universität eine trigonometrische Vermessung unseres Cantons vorzunehmen in Kenntniss gesetzt und da derselbe in Fall kommen wird auf der Scharten Flu bey Gempen und auf dem obern Paswang Signale aufzustellen, auch auf dem Durrek ob Eptingen und auf der Geiss Flu vielleicht etwas Holz ausleichten Hochdieselbe ersucht, die Ausführung dieser Arbeit gefällig zu gestatten, welchem Sie auch in allen Theilen entsprochen und D. H. G. A. Herrn als diejenige Behörde bezeichnet an welche sich Hr Prof. Huber wegen allfälliger Ausleichtung des Holzes zu wenden habe.

Um nun allen Weitläufigkeiten hierüber vorzubeugen, nehmen

wir die Freiheit Hochdieselben zu ersuchen uns gefälligst anzuzeigen an wen sich Hr Professor Huber auf diesen Stellen zu melden habe, um die nöthige Weisung und Unterstützung zu erhalten, und die nöthigen Befehle an dieselben zu ertheilen, damit Ihm kein Hinderniss gemacht werde.

Sie werden uns durch willfährige Entsprechung sehr verbinden, und wir werden jeden Anlass mit Vergnügen ergreifen, wo wir Ihnen Beweyse unserer Dienstbereitwilligkeit dargeben können.

Mit vollkommenster Hochachtung beehren wir

Anhang No. 9.

Schultheiss und Rath des Kantons Solothurn

an

Bürgermeister und Rath des Kantons Basel

Getreue liebe Eid- und Bundsgenossen!

Sie haben Ihrem Mitbürger Hn Daniel Huber, Professor der Mathematik auf der Universität zu Basel bevollmächtiget, den Kanton Basel trigonometrisch aufzunemmen, und bey Uns zu diesem Ende angesucht, dass wir zugeben möchten, dass auf der Schartenfluh bey Gempen, und auf dem obern Passwang Signale aufgestellt, und auf der Dureck ob Eptingen, sowohl als auf der Geisfluh ob Oltingen einiges Holz ausgeleichtet werden dörfe. Wir haben diesem Begehren, durch welches auch für die benachbarten Kantone gemeinnützige Resultate hervorgehen, mit Vergnügen entsprochen, und daher wegen der Signale an die Oberamtsmänner, und wegen Ausleichtung des Holzes an den Finanzrath, an welchen sich H. Professor Huber zu wenden hat, die gemessene Befehle ertheilt.

Wir empfehlen Die U. G. L. E. und Bundesgenossen mit dieser Anzeige samt uns dem Schutz des Allgütigen.

Solothurn d. 9ten Juny 1818.

Der Amtsschultheiss

Heinrich Grimm von Wartenfels.

Für den Staatsschreiber

Der Rathsschreiber

S. Glutz-Blotzheim.

Anhang No. 10.

Basel.

Hochgeachte Herren!

Durch Ihre Zuschrift vom 21ten diess fragen Hoch dieselben bey Uns an, an wenn sich Herr Professor Huber wegen Unterstützung bey seinen trigonometrischen Vermessungen und den nöthigen Ausleichtungen zu wenden habe.

Wir haben die Ehre, Ihnen hiermit anzuzeigen, dass sich H. Professor Huber nur an die Oberamtmänner der betreffenden Amteyen zu wenden habe, indem diese desshalb die erforderlichen Weisungen erhalten haben.

Solothurn d. 29ten Juny 1813.

Der Präsident des Finanz Raths
Ludwig von Roll des Raths.
Im Namen desselben
Staub
Erster Secret.

Anhang No. 11.

Auszüge aus den Rechnungen des Kantons Basel

betr.

Geometrische Ausmessung des Kantons.

Rechnung			Fr.	Bz.	Rp.
1813	1813. Febr. 5.	An Herr Prof. Huber zu Anschaffung eines Theodoliten	560.	—	—
	Oct. 22.	Reparationskosten eines Theodoliten nebst Fracht	177.	9.	—
	1814. Jan. 14.	an Herr Prof. Huber wegen geometrische Vermessung des Cantons gehabter Unkösten laut Rechg. . .	513.	1.	5.
			1251.	—	5.
1814	1815. Febr. 10.	An Herrn Adjunkt Merian Gratifikation als Beyhülf bei Herrn Prof. Huber	80.	—	—
		an Herrn Prof. Huber wegen gehabten Unkösten bei geometrischen Ausmessungen im Jahr 1814	438.	6.	5.
			518.	6.	5.
1815					
1816	17. Febr. 17.	Verrechnet Herr Prof. Huber für geometrische Vermessungen des Cantons	593.	3.	5.
1817					
1818	1819. Jan. 29.	Verrechnet Herr Prof. Huber für die Trigonometrische Vermessung A° 1817 u. 1818	338.	8.	—
1819	1820. Febr. 18.	An Herrn Prof. Huber für trigonometrische Vermessung	332.	5.	5.
1820	1821. Febr. 16.	Verrechnet Herr Prof. Huber . . .	191.	3.	—
		Herr Rathsherr Stehlin, Oberförster u. Merian wegen Hauenstein	490.	2.	—
		Herr Rathsherr Meschini, wegen gleichem, woran aber der Kanton Solothurn die Hälfte zu erstatten hat .	963.	4.	5.
			1644.	9.	5.

Rechnung				Fr.	Bz.	Rp.
1821		Sept. 21.	Herr Rathsherr Meschini à conto wegen Hauenstein 1648. — dessen Spesen 312. —	1960.	—	—
		28.	Vermessung der Bruderholzstrasse .	2.	9.	9.
	22.	Jan. 18.	Herr Rathsherr Stehlin, Kosten w. Hauenstein	454.	7.	5.
				2417.	7.	4.
1822	23.	Jan. 10.	Ver. Herr Dep. Huber, Namens der Landwirtschaftl. Commission, für Vermessungen im Sissacherbann .	201.	6.	—
1823	24.	März 26.	Ver. löbl. Landwirtschaftl. Commission wegen Staatswald etc. zu Itigen .	253.	6.	—
			Papyr u. Tuch zu Plänen des Itigerbanns	11.	—	—
				264.	6.	—
1824	25.	Jan. 14.	Verr. Herr Prof. Huber pro 1821—1824	493.	—	—
		März 18.	» Landwirtschaftl. Commission Zimmer im Bischofshof	874.	4.	—
			Winkelbestimmung des 2. Netzes an Frey 2136.50			
			dito Siegfried 189.50			
			dito Bader 201.50			
			Verification u. dem Schreiber für 3 Monate 370.70			
			Aussteinung u. Verpfählung 303.40	3201.	6.	—
				4569.	—	—
1825		Juni 10.	Herr Ing. Merian Vermessung am Hauenstein	41.	1.	5.
		Juli 1.	Herr Prof. Huber für Instrumente .	16.	—	—
	26.	Febr. 17.	verrechnet l. Landwirtschafl. Commission wegen Kadaster an Ing. Frey für Berechnung aufgenommener Winkel Fr. 550. 2. —			
			für Winkelbestimmung in 4 Bzk. » 1470. — —			
			dem Gehülfen » 384. — —			
			Taglöhne an Bannwarte; Signale » 316. 7. —			
			Perkall, Papyr, Schreibmaterial u. dgl. » 370. 5. —			
			Sekretärs Besoldung » 480. — —			
			Besoldung an Landkommissär » 1200. — —			
			54 Taggelder à Fr. 4.— » 216. — —	4987.	4.	—
				5044.	5.	5.

Rechnung				Fr.	Bz.	Rp.
1826		März 31.	An Herrn Dr. Laroche für Rückstand an Meschini	503.	5.	3
	27.	Febr. 2.	Ing. Frey für die Kosten	1064.	2.	—
			» Siegfried für Kleinhüningsbann .	407.	7.	—
			Landcommission Besoldung u. Diäten	1417.	5.	—
			Sekretariatshonorar	480.	—	—
			Staatsantheil an Vermessungen . .	34.	2.	5.
			Mess-Instrumente	90.	9.	5.
			Holz, Wellen, Handw. f. Bureau . .	269.	7.	8.
				4267.	9.	1.
1827	1828.	Jan. 31.	Verrechnet l. Landwirtsch. Commission für 1827			
			für Vermessungen der Geometer Frey und Wenk	4296.	6.	—
			für Staatsantheil an den Vermessungen im Bettinger u. Böckter Bann . .	285.	8.	7.
			für Besoldungen der Angestellten .	2067.	7.	7.
			» Instrumente und Geräthschaften.	137.	—	—
			» Buralausgaben	511.	8.	—
				7299.	—	4.

A. Krebs.

Konstruktionen gleichschenkliger Dreiecke mit Hilfe von Kurven höherer Ordnung.

EINLEITUNG.

§ 1. Ein gleichschenkliges Dreieck ist durch zwei Stücke bestimmt. Als Bestimmungsstücke sollen in Betracht fallen (Fig. 1):

1. Die Basis $OA = b$.
2. Der Schenkel $OB = AB = s$.
3. Die Basishöhe $BC = h_b$.
4. Die Schenkelhöhe $AD = h_s$.
5. Die durch die Schenkelhöhe erzeugten Schenkelabschnitte $OD = m$ und $DB = n$.

Im ganzen haben wir also sechs Bestimmungsstücke. In allen Konstruktionsaufgaben, die wir lösen werden, soll die Basis b das erste gegebene Stück sein. Als Zweites fügen wir die Summe oder Differenz aus je zweien der übrigen fünf Bestimmungsgrössen hinzu.

Ein gleichschenkliges Dreieck hat für uns jetzt vier Fundamentalpunkte. Zwei davon sind stets durch die Basis gegeben. Ist von den andern zweien — es betrifft dies noch die Spitze B und den Fusspunkt D der Schenkelhöhe — der eine bestimmt, so ist das Problem gelöst. Jede Aufgabe gestattet daher eine doppelte Lösungsart. Die Bestimmung des dritten festen Punktes erfordert, wie wir bald sehen werden, die Konstruktion einer Kurve höherer Ordnung. Sollte eine solche Hilfskurve nicht näher bekannt sein, so erlauben wir uns, dieselbe nebenbei einer mehr oder weniger eingehenden Untersuchung zu unterwerfen.

I.

§ 2. *Erste Aufgabe: Ein gleichschenkliges Dreieck zu konstruieren, wenn die Basis b und die Summe oder Differenz aus der Basishöhe und dem an die Spitze grenzenden Schenkelabschnitt gegeben sind.*

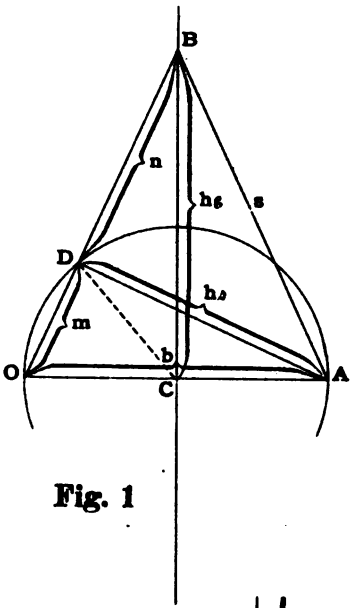


Fig. 1

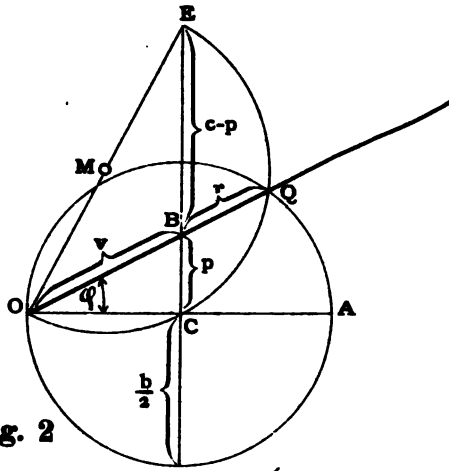


Fig. 2

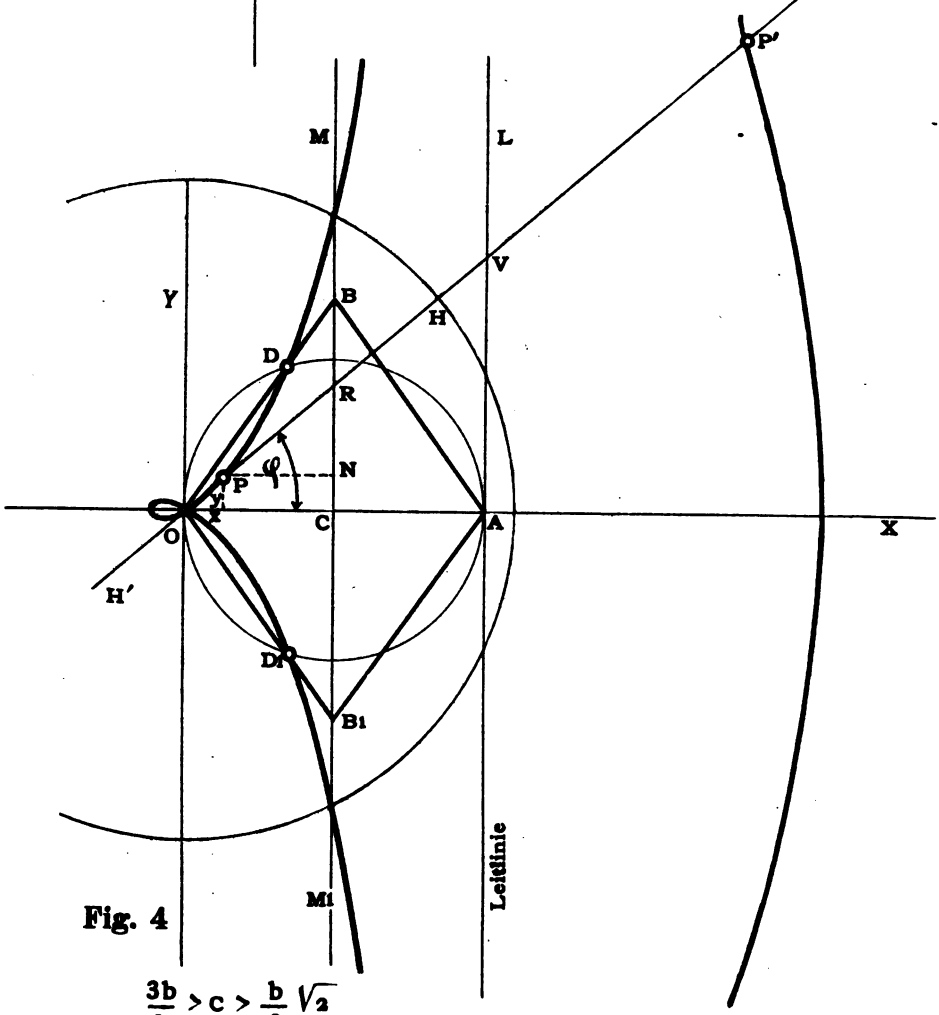


Fig. 4

$$\frac{3b}{2} > c > \frac{b}{2}\sqrt{2}$$

Tafel I

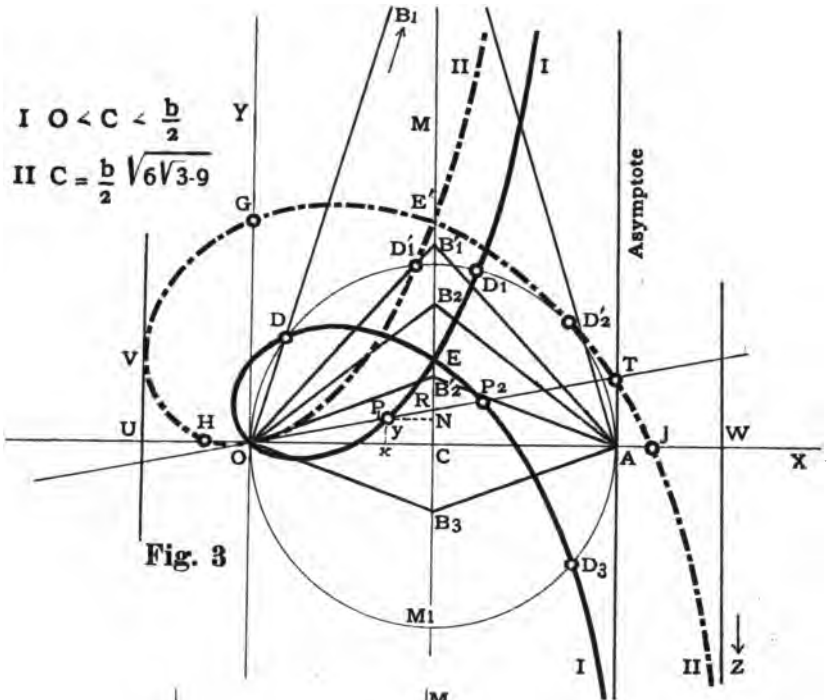


Fig. 3

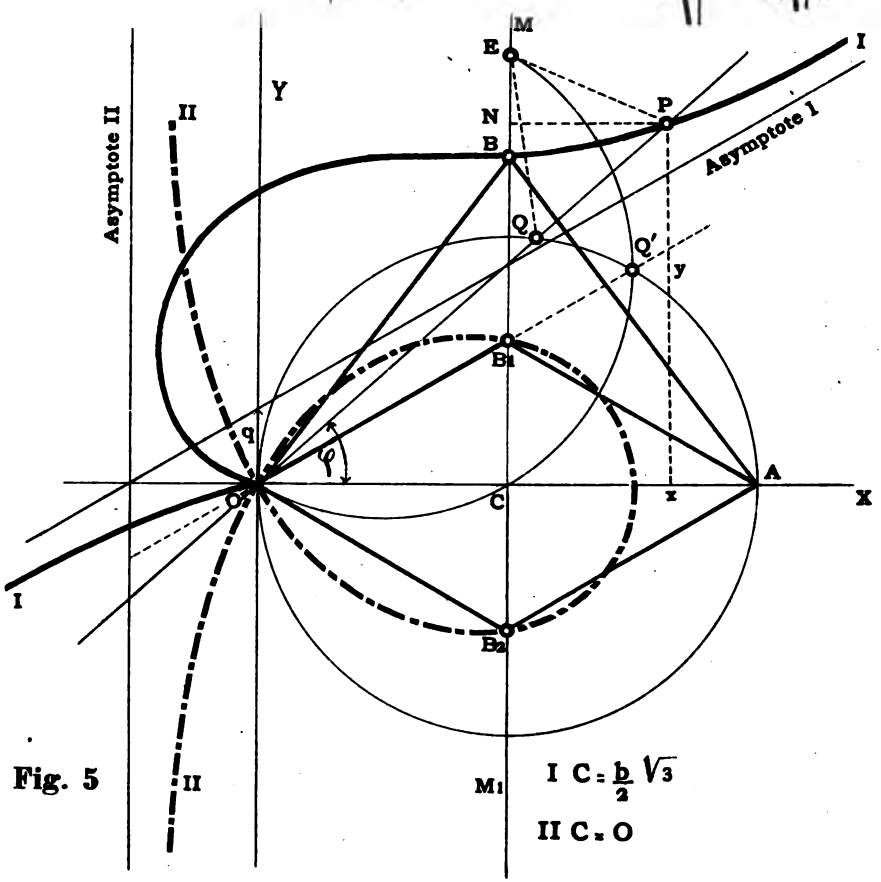
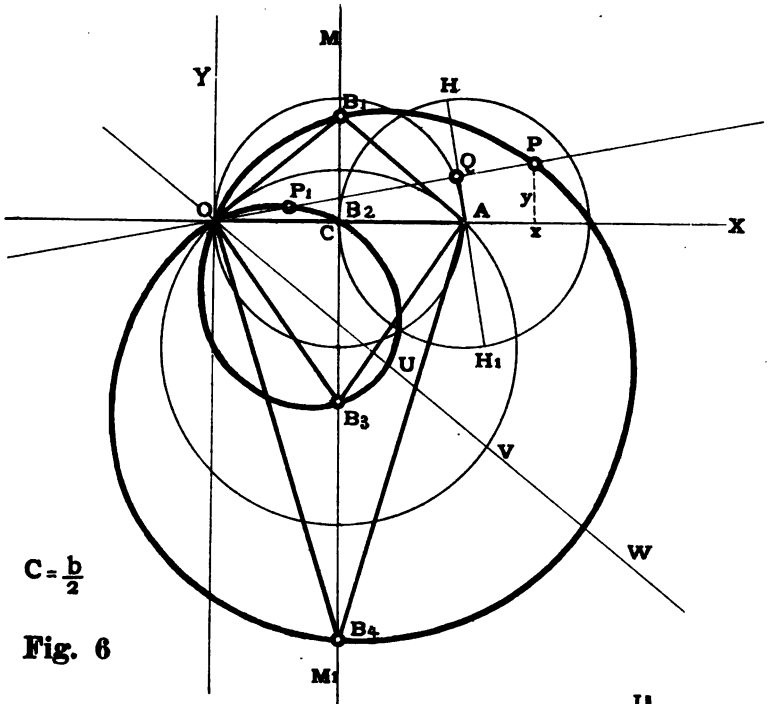


Fig. 5



$C = \frac{b}{2}$

Fig. 6

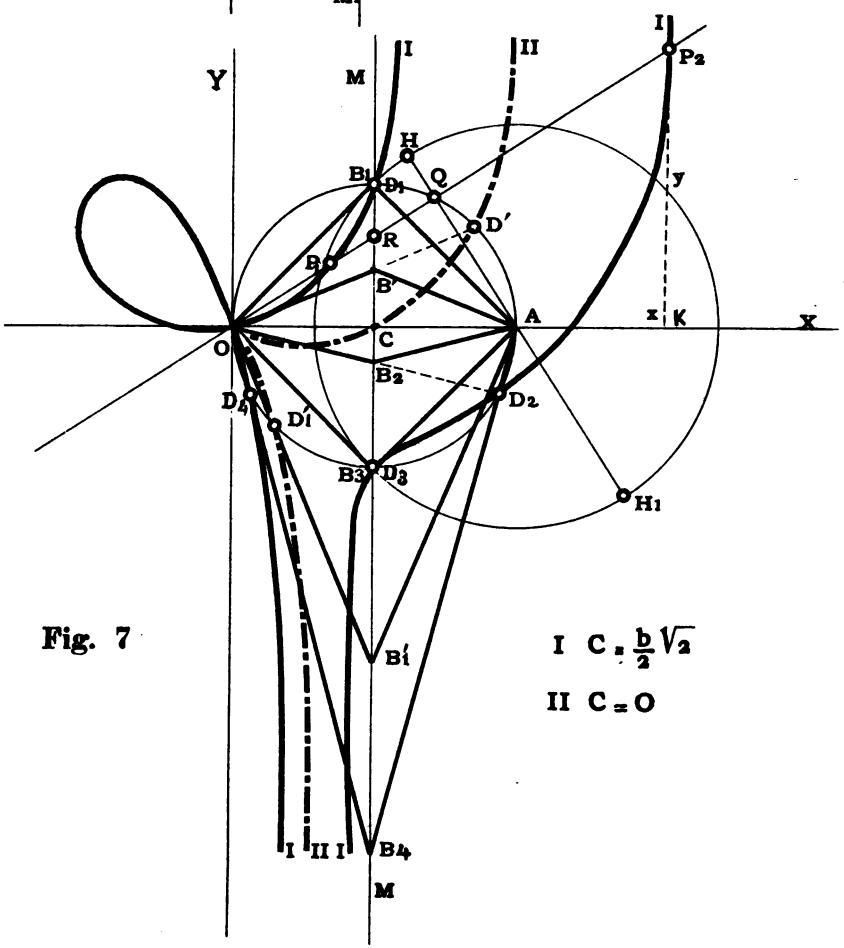


Fig. 7

I $C = \frac{b}{2}\sqrt{2}$

II $C = O$

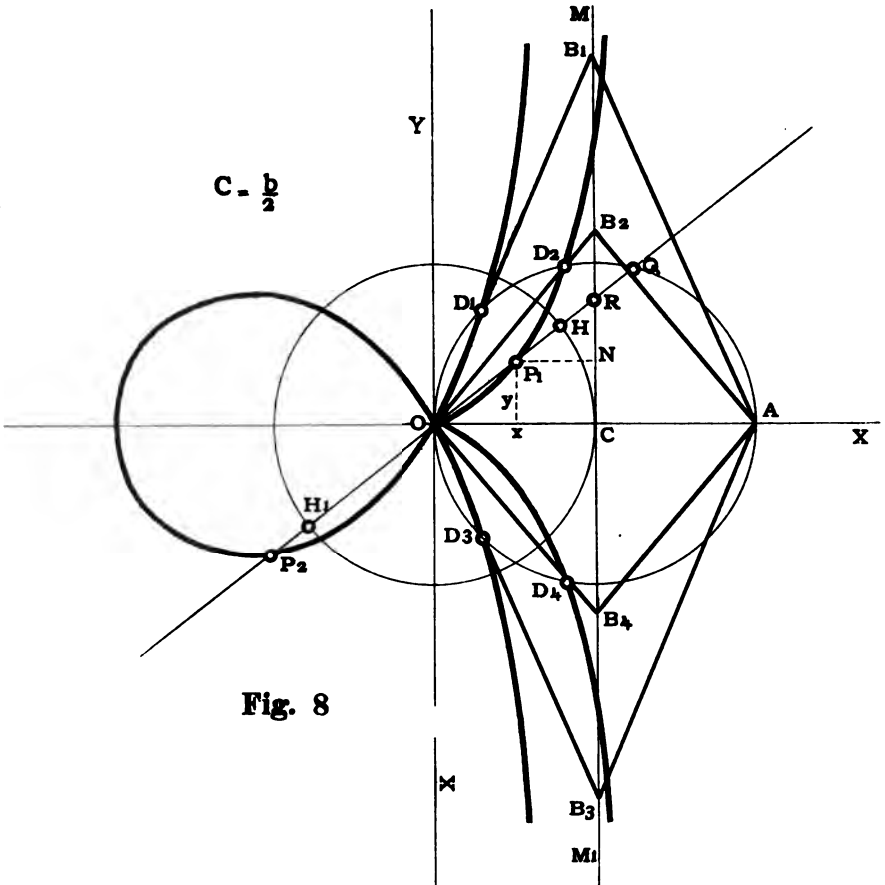

M
B1
Y
C = b/2
B2
D2
Q2
D1
R
H
N
P1
y
x
C
A
X
H1
D3
P2
D4
B4
B3
M1

Fig. 8

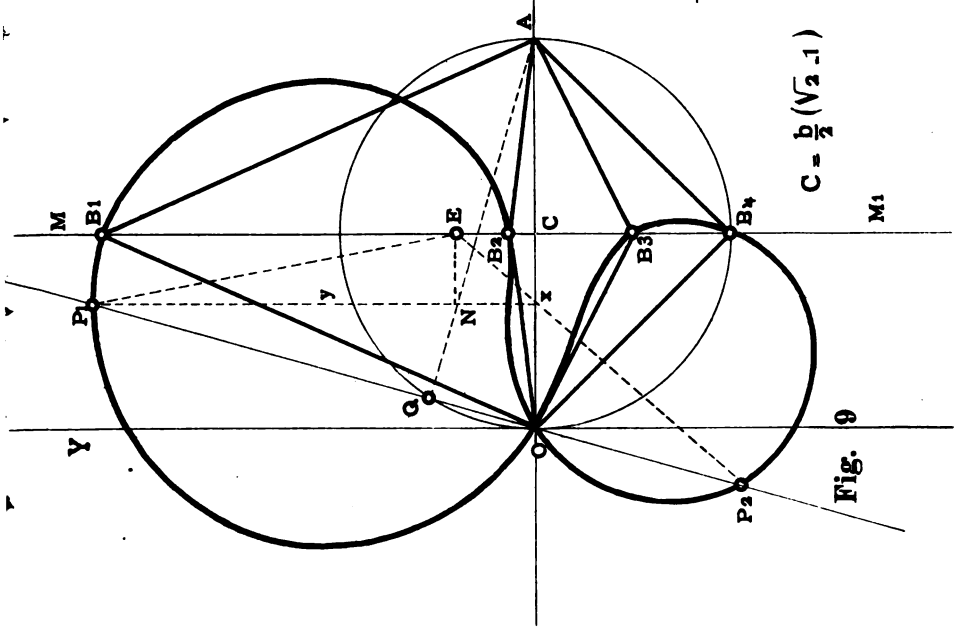
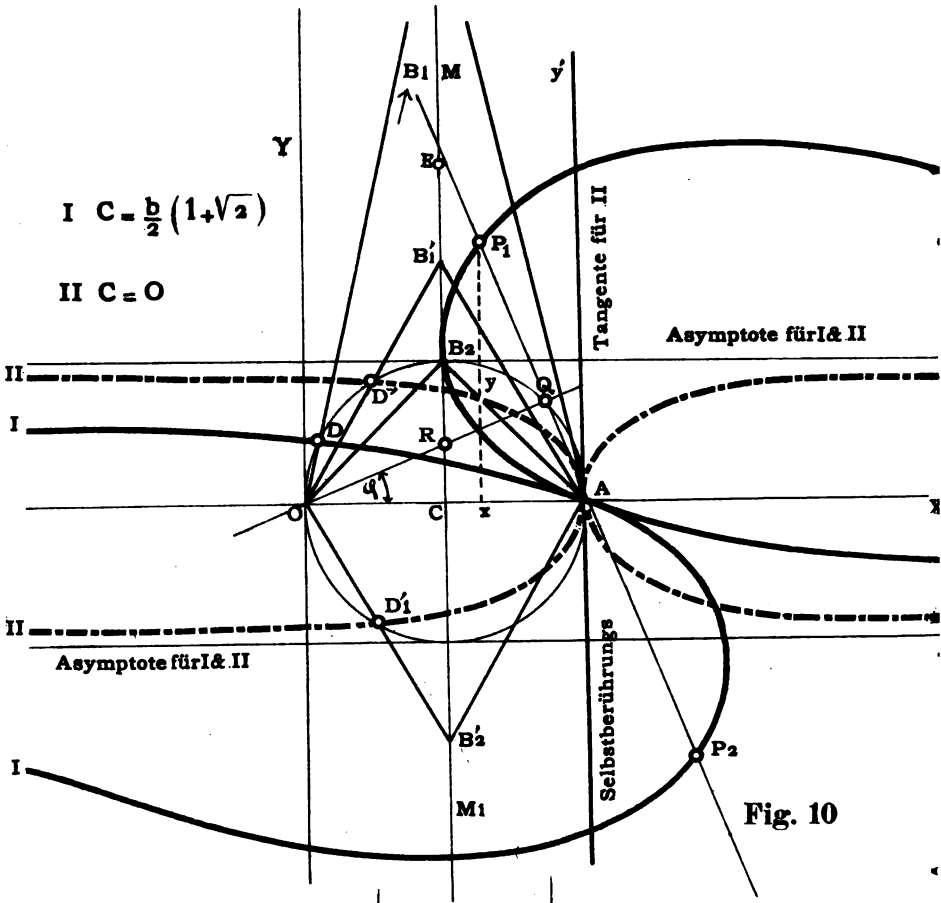
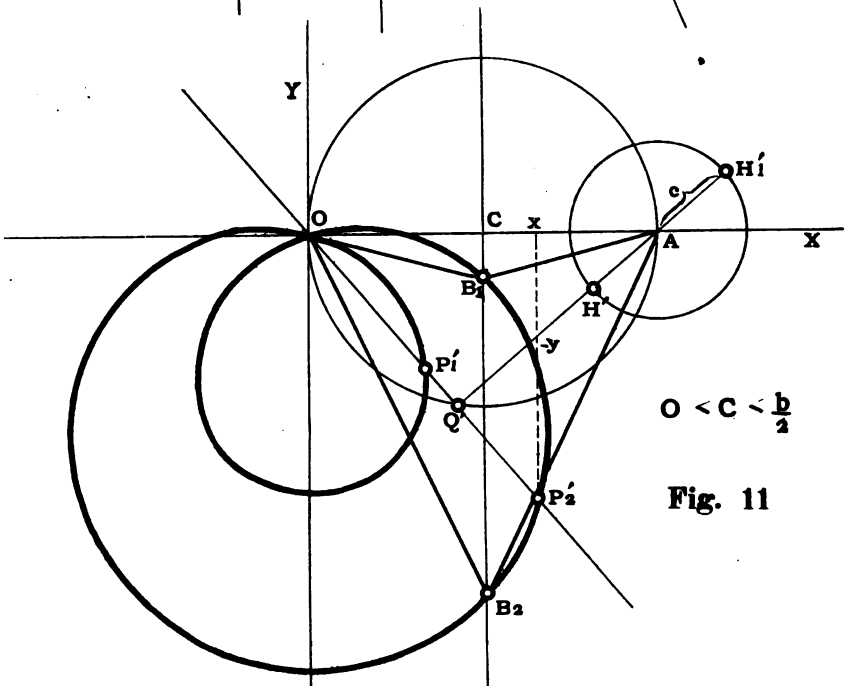

X
A
C = b/2 (√2 - 1)
M
B1
E
C
B2
B3
B4
M1
P1
y
N
x
Q
Y
P2

Fig. 9



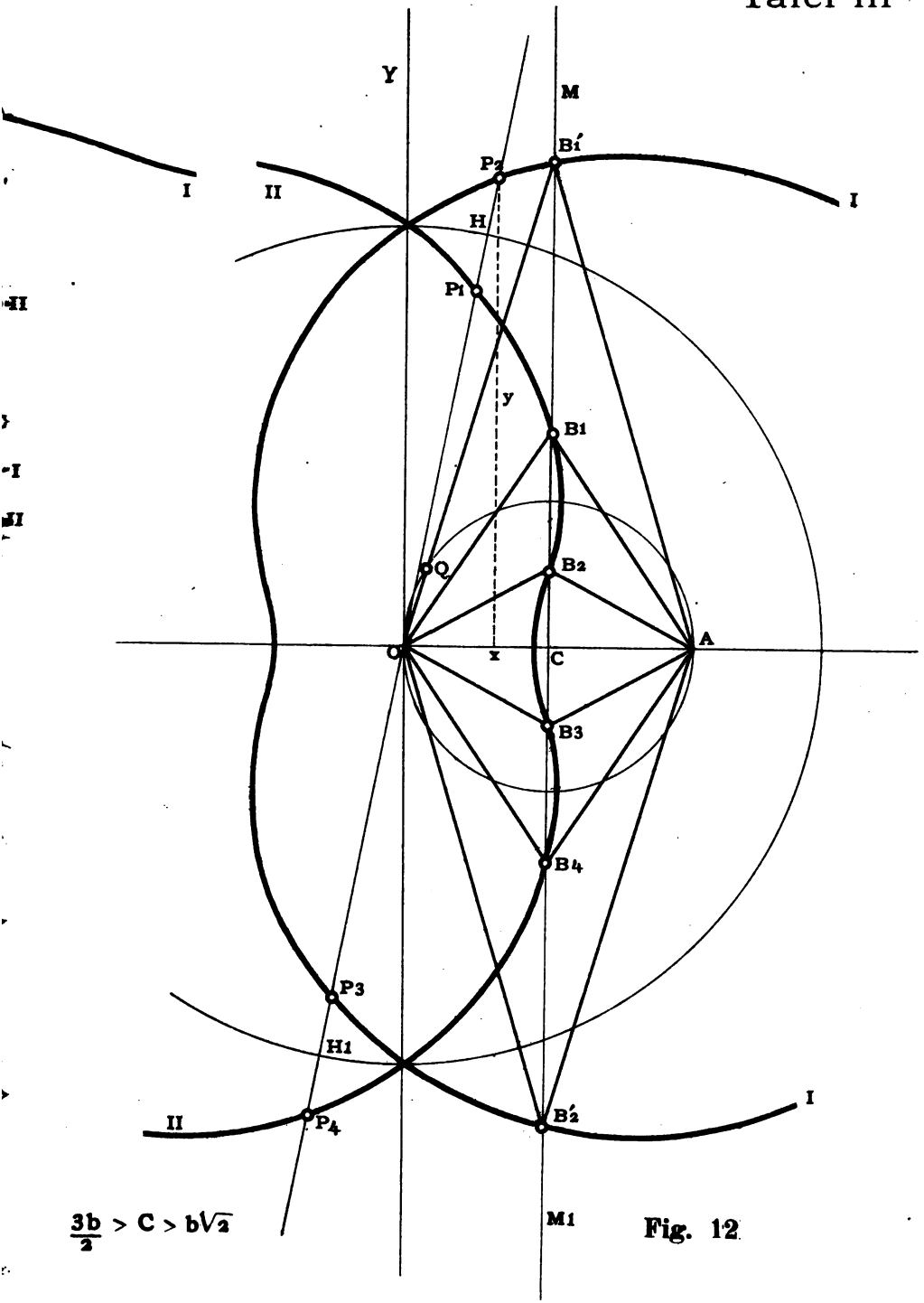
I $C = \frac{b}{2}(1+\sqrt{2})$
II $C = O$
Y
B1
M
y'
E
P1
B1'
B2
Tangente für II
Asymptote für I & II
II
I
D'
y
Q
D
R
φ
O
C
x
A
X
D1'
II
Asymptote für I & II
B2'
P2
I
M1
Selbstberührungs

Fig. 10



Y
H1'
c
O
C
x
A
X
B1
H'
-y
P1'
Q'
O < C < b/2
P2'
B2

Fig. 11



$\frac{3b}{2} > C > b\sqrt{2}$

Fig. 12

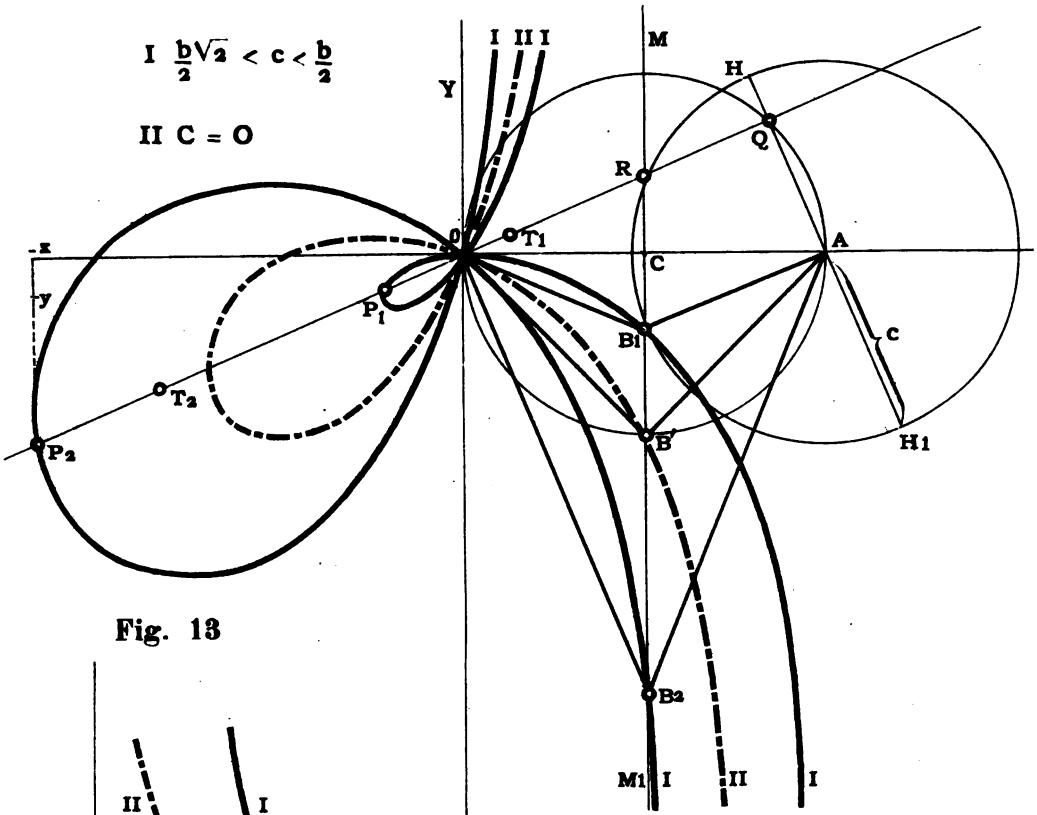

I $\frac{b}{2}\sqrt{2} < c < \frac{b}{2}$
II C = O
I II I
M
Y
H
Q
R
O
T1
A
C
-x
y
P1
B1
c
T2
B'
H1
P2
B2
M1 I
II
I

Fig. 13

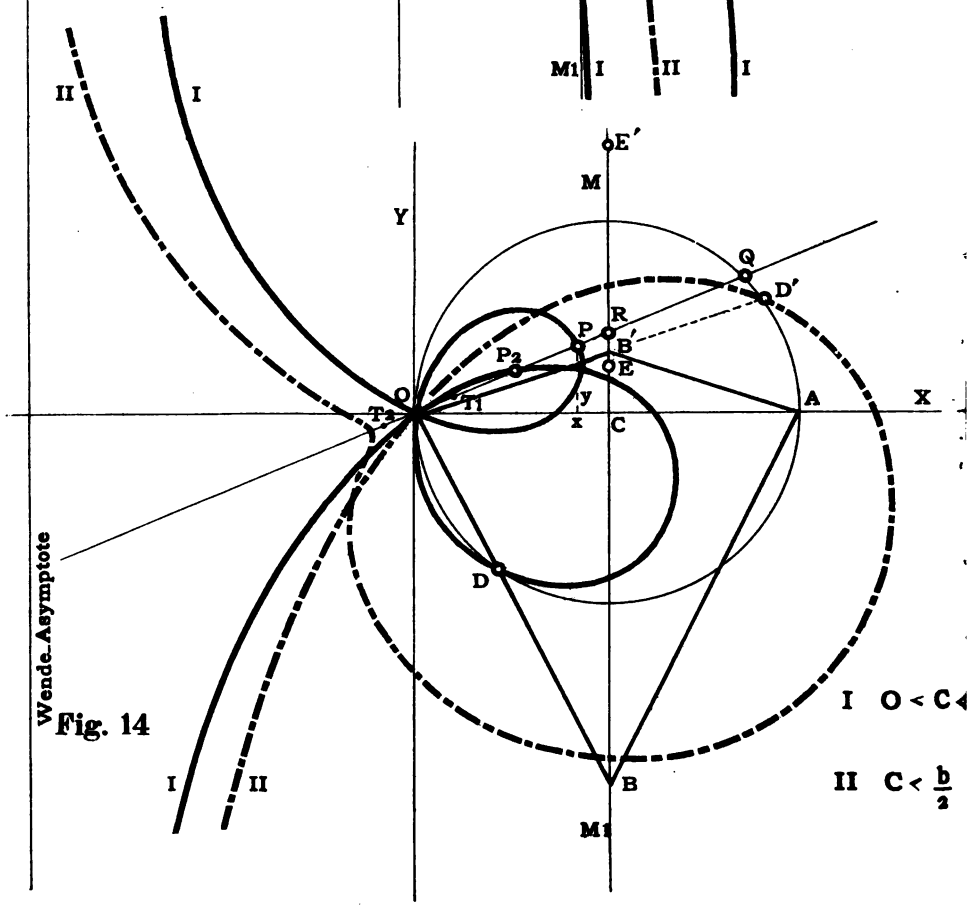

II
I
E'
M
Y
Q
D'
R
P
B'
P2
E
O
T1
y
A
X
T2
x
C
D
Wende-Asymptote
I O < C
I
II
B
II C < $\frac{b}{2}$
M1

Fig. 14

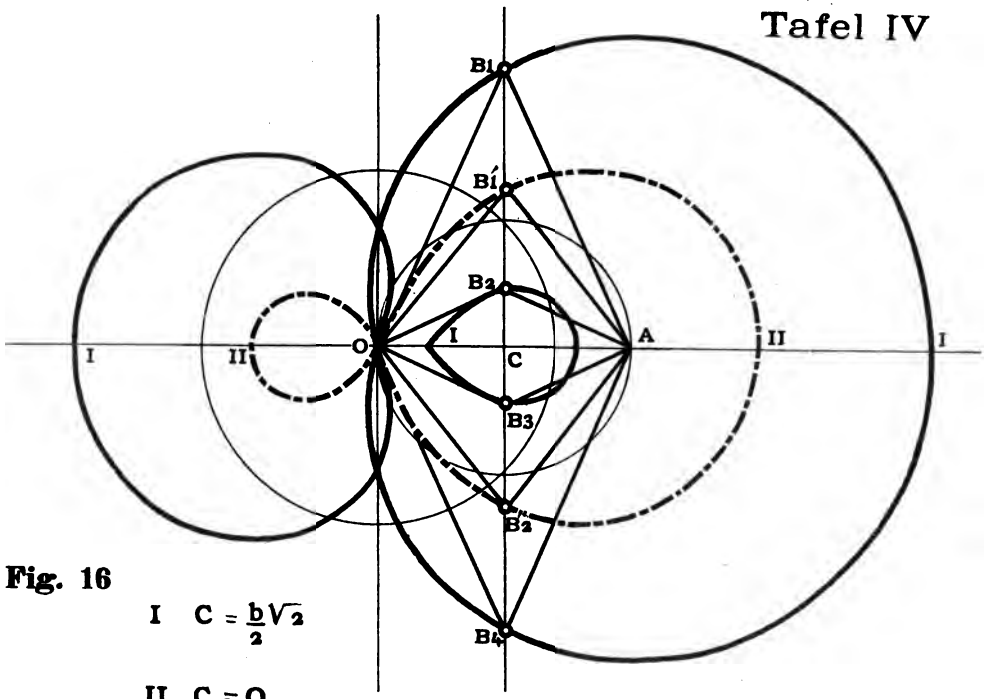


Fig. 16

I $C = \frac{b}{2}\sqrt{2}$

II $C = O$

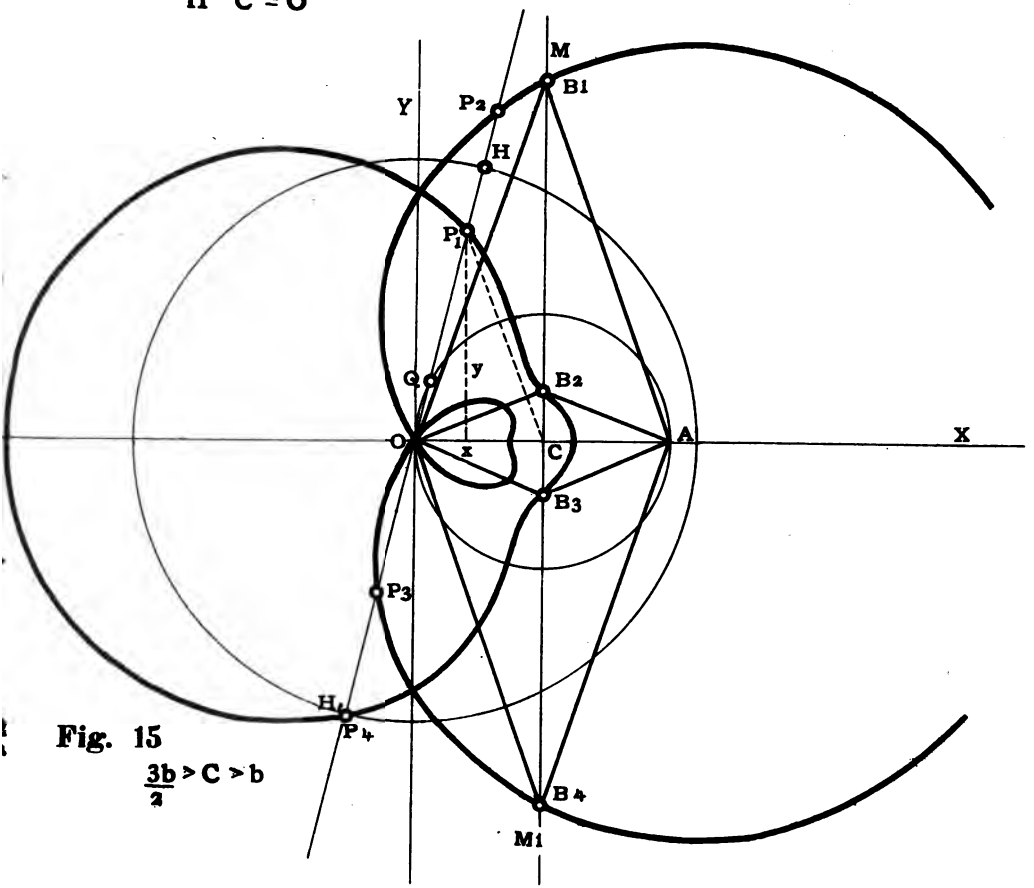


Fig. 15

$\frac{3b}{2} > C > b$

Gegeben 1. b;

2. $h_b \mp n = \mp c = \text{konstant}$.

Die Lösung ist möglich unter der Bedingung, dass

$$1.\quad h_b + n \geqq \frac{b}{2},$$

$$2.\quad \frac{b}{2} \gtreqless h_b - n \geqq -\frac{b}{2}.$$

Die Summe $h_b + n$ erreicht das Minimum $\frac{b}{2}$ bei einem unendlich kleinen und bei einem rechtwinkligen Dreieck. Die Differenz $h_b - n$ wird bei einem unendlich kleinen Dreieck zum Minimum $= -\frac{b}{2}$ und beim rechtwinkligen Dreieck zum Maximum $= \frac{b}{2}$. Bei jedem andern Dreieck wird $h_b - n$ abs. $< \frac{b}{2}$, was nach einem planimetrischen Satze sofort ersichtlich ist, wenn wir in Figur (1) D mit C verbinden.

§ 3. *Erste Lösung. Bestimmung des Fusspunktes D der Schenkelhöhe.*

a) Wir konstruieren zu diesem Zweck folgenderweise eine Hilfskurve. Es sei (siehe Fig. 3 I, Tafel I) $OA = b$ die gegebene Basis. Wir ziehen durch ihre Mitte C die Mittelsenkrechte MM_1. Auf derselben wählen wir den festen Punkt E so, dass $CE = c =$ der gegebenen Summe oder Differenz ist. Wir ziehen nun durch O einen Strahl, der die Mittelsenkrechte in R schneidet. Auf diesem Strahl tragen wir von R aus nach beiden Seiten die Strecke RE ab und bezeichnen die so gewonnenen Punkte mit P_1 und P_2. Wird nun der Strahl OR um O gedreht, so beschreiben die Punkte P_1 und P_2 die gesuchte Kurve. Dieselbe muss nach Konstruktion in E einen Doppelpunkt haben. Für die Kurvenpunkte P auf Strahlen, welche die Mittelsenkrechte zwischen Doppelpunkt E und der Basis OA schneiden, gilt die Relation:

$$P_1R + RC = P_2R + RC = CE = c.$$

Schneiden die Strahlen die Mittelsenkrechte oberhalb des Doppelpunktes E, so entsprechen die darauf liegenden Kurvenpunkte der Bedingung:

$$RC - RP_1 = RC - RP_2 = CE = c.$$

Kurvenpunkte endlich, deren Strahlen die Mittelsenkrechte unterhalb der Basis O A schneiden, genügen der Relation:

$$RP_1 - RC = RP_2 - RC = EC = c.$$

Die drei Relationen entsprechen den drei Bedingungen:

1. $h_b + n = c$;
2. $h_b - n = c$;
3. $n - h_b = c$.

Wir denken uns nun auf der Basis O A ein gleichschenkliges Dreieck konstruiert. Ist dasselbe das gesuchte, d. h. entspricht es den gestellten Bedingungen, so muss der Schnittpunkt des Schenkels O B mit der Kurve Fusspunkt der Schenkelhöhe sein. Nach Fig. 1 liegt der Fusspunkt D der Schenkelhöhe auf einem um O A als Durchmesser gezogenen Kreise. Um unsere Aufgabe mit Hilfe der konstruierten Kurve zu lösen, haben wir also noch um O A als Durchmesser den besagten Kreis zu ziehen, den wir fortan in allen unsern Konstruktionen den Grundkreis nennen wollen. Die Schnittpunkte des Grundkreises mit der Hilfskurve liefern die gesuchten Fusspunkte D der Schenkelhöhe.

b) Ableitung der Kurvengleichung.

Wir verwenden ein rechtwinkliges Koordinatensystem, wählen O zum Nullpunkt desselben und legen durch O A die positive x-Axe. Es seien x und y die Koordinaten des Punktes P_1. Ferner erinnern wir daran, dass $P_1R + RC = c$ und dass $OC = \frac{b}{2}$ ist.

Es ist nun $\overline{P_1R}^2 = \overline{P_1N}^2 + \overline{NR}^2$; (α)

$P_1R = c - RC$ nach Konstruktion;

$P_1N = \frac{b}{2} - x$;

$NR = RC - y$.

Nun verhält sich $RC: y = \frac{b}{2}: x$, woraus folgt, dass

$$RC = \frac{by}{2x}.$$

Setzen wir die gefundenen Werte alle in (α) ein, so erhalten wir

$$\left(c - \frac{by}{2x}\right)^2 = \left(\frac{b}{2} - x\right)^2 + \left(\frac{by}{2x} - y\right)^2,$$

vereinfacht

$$(x^2 + y^2)(b - 2x)^2 - (2cx - by)^2 = 0. \qquad (1)$$

Die Gleichung (1) stellt eine Kurve 4. Ordnung dar, die im Nullpunkt einen Doppelpunkt hat. Sie ist aber keine ächte Kurve 4. Ordnung; denn sie zerfällt in eine Kurve 3. Ordnung und in eine Gerade. Es lässt sich nämlich der Faktor x absondern und wegdividieren. Die y-Axe ist somit die Gerade.

Um den Faktor x wegdividieren zu können, bringen wir (1) auf die Form

$$(2cx - by)^2 - y^2(b - 2x)^2 = x^2(b - 2x)^2.$$

Wir zerlegen die linke Seite in zwei Faktoren, worauf wir ohne weiteres die Gleichung durch 4x dividieren können. Wir erhalten schliesslich für unsere Kurve 3. Ordnung die Gleichung

$$(x^2 + y^2)(x - b) - x\left(c^2 - \frac{b^2}{4}\right) + bcy = 0. \qquad (2)$$

c) Die Eigenschaften der Kurve.

Die Kurve geht durch den Nullpunkt; denn die Gleichung beginnt mit Gliedern ersten Grades.

Setzen wir $U_1 = bcy - x\left(c^2 - \frac{b^2}{4}\right) = 0$, so erhalten wir

$$y = \frac{4c^2 - b^2}{4bc}\, x \text{ als Gleichung der} \qquad (3)$$

Tangente im Nullpunkt.

Für $c = \frac{b}{2}$ wird $y = 0$; die Tangente fällt mit der x-Axe zusammen.

Für $c = 0$ wird $x = 0$; die Tangente fällt mit der y-Axe zusammen.

Um die Schnittpunkte der Kurve mit der x-Axe zu bekommen, setzen wir $y = 0$ und erhalten

$$x^3 - bx^2 - x\left(c^2 - \frac{b^2}{4}\right) = 0, \text{ woraus}$$

$x_1 = 0$, Punkt O (Kurve II);

$x_2 = \frac{b}{2} + c$, Punkt J;

$x_3 = \frac{b}{2} - c$, » H.

Die Punkte J und H sind gleich weit von C, dem Mittelpunkt der Basis, entfernt.

Setzen wir $x = 0$, so erhalten wir die Schnittpunkte der Kurve mit der y-Axe:

$$by^2 - bcy = 0;$$
$$y_1 = 0, \text{ Punkt } O;$$
$$y_2 = c, \quad » \quad G.$$

Der 3. Schnittpunkt der Kurve mit der y-Axe liegt im Unendlichen; denn der Koeffizient des Gliedes y^3 ist $= 0$.

Um die Schnittpunkte der Kurve mit der unendlich fernen Geraden zu bestimmen, machen wir die Gleichung mit z homogen, setzen dann $z = 0$ und erhalten

$$U_3 = (x^2 + y^2)\,x = 0;$$
$$1.\ x = 0;$$
$$2.\ y = \pm ix.$$

Wir finden somit, dass die Kurve durch die unendlich fernen imaginären Kreispunkte der Ebene geht und dass sie in der Richtung der y-Axe eine reelle Asymptote hat. Die Gleichung dieser reellen Asymptote lautet, wie aus der Kurvengleichung leicht zu ersehen ist,

$$x = b; \tag{4}$$

denn bestimmen wir die Schnittpunkte der Geraden $x = b$ mit der Kurve, so erhalten wir in y nur eine Gleichung ersten Grades, nämlich

$$y = \frac{4c^2 - b^2}{4c}, \text{ Punkt } T;$$

folglich schneidet die Gerade $x = b$ im Endlichen die Kurve nur in einem Punkt. Die übrigen zwei Schnittpunkte müssen, da die Koeffizienten von y^2 und $y^3 = 0$ sind, im Unendlichen liegen.

Wir lösen die Gleichung nach y auf und erhalten

$$y = \frac{bc \pm \sqrt{c^2(2x-b)^2 + (b-x)[4x^2(x-b) + b^2x]}}{2(b-x)},$$

vereinfacht

$$y = \frac{bc \pm (2x-b)\sqrt{c^2 + bx - x^2}}{2(b-x)}.$$

Aus diesem Ausdruck für y resultiert, dass die Kurve nicht symmetrisch zur x-Axe liegt. Die Kurve ist überhaupt, vom Spezialfall $c = 0$ abgesehen, keine symmetrische Kurve; sie kann durch keine Transformation symmetrisch gemacht werden.

So lange $c^2 + bx - x^2$ positiv ist, erhalten wir für y zwei reelle und verschiedene Werte. Für einen negativen Radikanden wird y imaginär. Für den Grenzfall verschwindet der Wurzelausdruck; die beiden Werte von y fallen zusammen, und die Ordinate wird zur Tangente an die Kurve, wenn

$$c^2 + bx - x^2 = 0, \text{ woraus}$$

$$x = \frac{b + \sqrt{b^2 + 4c^2}}{2};$$

für das positive Zeichen erhalten wir die Tangente WZ. Ordinate im Berührungspunkt Z:

$$y = -\frac{b(b + \sqrt{b^2 + 4c^2})}{4c} = \text{neg.}$$

Für das neg. Zeichen im Ausdruck für x bekommen wir die Tangente UV. Ordinate im Berührungspunkt V:

$$y = \frac{b(\sqrt{b^2 + 4c^2} - b)}{4c} = \text{pos.}$$

$$\left.\begin{aligned} x &> \frac{b + \sqrt{b^2 + 4c^2}}{2} \\ x &< \frac{b - \sqrt{b^2 + 4c^2}}{2} \end{aligned}\right\}, \text{ so wird y imaginär.}$$

Der absteigende Ast der Kurve, welcher die Asymptote $x = b$ im Punkt T schneidet, kehrt dieser die konkave Seite zu. Es muss daher die Kurve unterhalb des Berührungspunktes Z der äussersten Tangente WZ einen *Wendepunkt* besitzen, von dem aus sie der Asymptote wieder die konvexe Seite zuwendet.

Die Kurve hat in E einen Doppelpunkt, was nicht nur aus der Konstruktion folgt, sondern auch analytisch ersichtlich wird, wenn wir den Nullpunkt nach E verschieben vermittelst der Transformationsformeln

$$x = x' + \frac{b}{2},$$

$$y = y' + c.$$

Die Gleichung der Kurve nach der Transformation lautet:

$$(x'^2 + y'^2)x' + \frac{b}{2}(x'^2 - y'^2) + 2cx'y' = 0. \qquad (5)$$

Der Nullpunkt ist nun Doppelpunkt; denn die Gleichung beginnt mit Gliedern zweiten Grades.

Für die Tangenten im Doppelpunkt erhalten wir die Gleichung

$$y' = \frac{2c \pm \sqrt{b^2 + 4c^2}}{b} x'. \tag{6}$$

Die beiden Tangenten stehen senkrecht aufeinander; denn es ist $m_1 = -\frac{1}{m_2}$.

Unsere Kurve ist eine *rationale* Kurve; denn sie besitzt einen Doppelpunkt, also das mögliche Maximum. Wir können daher die Koordinaten eines Punktes als rationale Funktionen eines Parameters λ darstellen. Wählen wir trigonometrische Funktionen als Parameter, so erhalten wir, wenn wir Gleichung (5) zu Grunde legen,

$$\left.\begin{aligned} x' &= -\left(c \sin 2\varphi + \frac{b}{2} \cos 2\varphi\right); \\ y' &= -\left(c \sin 2\varphi + \frac{b}{2} \cos 2\varphi\right) \operatorname{tg} \varphi. \end{aligned}\right\} \tag{7}$$

φ bedeutet den Winkel, den der Leitstrahl mit der positiven x-Axe bildet.

Wir wollen nun untersuchen, welche Modifikationen die Kurve erleidet, wenn wir c variieren lassen.

1. $c = \frac{b}{2}$.

Die Gleichung (2) bekommt die Form

$$(x^2 + y^2)(x - b) + \frac{b^2}{2} y = 0. \tag{8}$$

Die Kurve schneidet sowohl die x-Axe als auch die Asymptote $x = b$ im Punkte $A(b, 0)$.

Die x-Axe ist, wie schon oben erwähnt, im Nullpunkt Tangente.

Die Gleichung nach y aufgelöst, ergiebt

$$y = \frac{b^2 \pm (2x - b)\sqrt{b^2 + 4bx - 4x^2}}{4(b - x)}.$$

y wird reell, wenn x zwischen $\frac{b}{2}(1 - \sqrt{2})$ und $\frac{b}{2}(1 + \sqrt{2})$ variiert.

$x = \frac{b}{2}(1 - \sqrt{2})$ ist Tangente im Punkt V,

und $x = \frac{b}{2}(1 + \sqrt{2})$ ist Tangente im Punkt Z.

Der Doppelpunkt E rückt in den Grundkreis. Wird E zum Nullpunkt des Koordinatensystems gewählt, so erhalten wir, wenn wir in (5) $c = \frac{b}{2}$ setzen, als Gleichung der Kurve:

$$(x'^2 + y'^2)\,x' + \frac{b}{2}(x'^2 + 2x'y' - y'^2) = 0. \tag{9}$$

Die Gleichung der Doppelpunktstangenten lautet

$$y' = (1 \mp \sqrt{2})\,x'. \tag{10}$$

Gleichung (7) nimmt die Form an

$$\left.\begin{aligned} x' &= -\frac{b}{2}\sqrt{2}\cos\left(2\varphi - \frac{\pi}{4}\right); \\ y' &= -\frac{b}{2}\sqrt{2}\cos\left(2\varphi - \frac{\pi}{4}\right)\operatorname{tg}\varphi. \end{aligned}\right\} \tag{11}$$

2. $c = 0$.

Die Gleichung der Kurve lautet

$$(x^2 + y^2)(x - b) + \frac{b^2 x}{4} = 0. \tag{12}$$

Wir verlegen den Koordinatenursprung in den Doppelpunkt E und erhalten als Kurvengleichung, wenn wir in (5) $c = 0$ setzen

$$(x'^2 + y'^2)\,x' + \frac{b}{2}(x'^2 - y'^2) = 0. \tag{13}$$

Dies ist die Gleichung der *Strophoide*. Es ist der einzige Spezialfall, in welchem die Kurve, wie schon angedeutet, symmetrisch wird. Der Wendepunkt rückt ins Unendliche hinaus und fällt in die Asymptote. Letztere ist ja wie bekannt eine Wendetangente.

3. $c = \infty$.

Der Doppelpunkt liegt im Unendlichen in der Richtung der y-Axe. Die Kurve selber besteht aus der y-Axe und der doppelt gelegten unendlich fernen Geraden.

4. $c =$ *negativ.*

Setzen wir für c negative Werte ein, so erhalten wir der Reihe nach dieselben Kurven wie für positive c; nur sind dieselben immer Spiegelbilder der erstern in Bezug auf die x-Axe. Die Kurven für positive und negative c liegen daher paarweise symmetrisch zur x-Axe. Alle besitzen die gemeinschaftliche Asymptote $x = b$.

d. Die Lösungen der Konstruktionsaufgabe.

Wir suchen die Punkte D, die Fusspunkte der Schenkelhöhe. Dieselben sind, wie wir schon gezeigt haben, die Schnittpunkte des Grundkreises mit der Kurve. Ein Kreis schneidet eine Kurve dritter Ordnung in 6 Punkten. Da nun beide Kurven durch den Nullpunkt und durch die imaginären Kreispunkte der Ebene gehen, so fallen von vorneherein 3 Schnittpunkte ausser Betracht. Es bleiben also noch 3 Schnittpunkte zu bestimmen übrig. Als Gleichung der Kurve haben wir

$$(x^2+y^2)(x-b)-x\left(c^2-\frac{b^2}{4}\right)+bcy=0. \qquad (\alpha)$$

und als Gleichung des Kreises

$$x^2-bx+y^2=0. \qquad (\beta)$$

Wir lösen Gleichung (β) nach y auf und erhalten

$$y=\sqrt{bx-x^2}.$$

Diesen Wert setzen wir in (α) ein; es giebt

$$bx(x-b)-x\left(c^2-\frac{b^2}{4}\right)=-bc\sqrt{bx-x^2}.$$

Quadriert, auf Null gebracht und den Faktor x wegdividiert

$$x^3-\frac{3b^2+4c^2}{2b}x^2+\frac{9b^4+40b^2c^2+16c^4}{16b^2}x-bc^2=0.$$

Die Wurzeln dieser kubischen Gleichung sind die Abscissen der Schnittpunkte D. Als Diskriminante der Gleichung erhalten wir den Ausdruck:

$$\Delta=\frac{c^2}{108\cdot 64\,b^4}(-27\,b^8+288\,b^6c^2-992\,b^4c^4+1024\,b^2c^6+256c^8).$$

Δ = positiv; die Gleichung besitzt eine reelle und zwei imaginäre Wurzeln.

$\Delta=0$; alle drei Wurzeln sind reell und zwei fallen zusammen.

Δ = negativ; drei reelle und unter sich verschiedene Wurzeln.

Wir behandeln zuerst den mittlern Fall und untersuchen, für welche Werte von c die Diskriminante verschwindet. Wir setzen:

$4c^2=\xi$ und $b^2=\eta$ und führen diese Werte im Ausdruck für Δ ein. Bestimmen wir hierauf die Wurzeln der Gleichung $\Delta=0$, so finden wir, dass sich die Diskriminante folgendermassen in Faktoren zerlegen lässt:

$$\Delta = \frac{c^2}{108 \cdot 64 b^4} (4c^2 - b^2)^2 (16c^4 + 72b^2c^2 - 27b^4).$$

Es wird somit $\Delta = 0$, wenn

1. $c = 0$;
2. $c = \frac{b}{2}$;
3. $c = \frac{b}{2}\sqrt{6\sqrt{3} - 9}$.

In Bezug auf die Löungen unserer Aufgabe können wir folgende drei Hauptfälle unterscheiden:

A. $c > \frac{b}{2}$.

Für sämtliche Dreiecke, die sich als Lösung ergeben, gilt die Relation

$$h_b + n = c.$$

B. $c = \frac{b}{2}$.

Die Dreiecke entsprechen der Bedingung

$$h_b \pm n = \pm c = \pm \frac{b}{2}.$$

Von den beiden Grössen h_b und n ist die eine $= 0$.

C. $c < \frac{b}{2}$.

Für die Dreiecke gilt $h_b - n = \pm c$.

A. $c > \frac{b}{2}$.

1. $c > \frac{b}{2}\sqrt{6\sqrt{3} - 9}$.

Die Diskriminante ist positiv; wir erhalten nur eine reelle Wurzel als Abscisse, d. h. der Grundkreis schneidet die Kurve nur in einem reellen Punkt. Dieser Schnittpunkt liefert ein *spitzwinkliges Dreieck.*

2. $c = \frac{b}{2}\sqrt{6\sqrt{3} - 9}$. Taf. I, Fig. 3.

Die Diskriminante verschwindet. Es giebt 3 reelle Wurzeln, wovon 2 zusammenfallen. Grundkreis und Kurve schneiden sich in D_1' und berühren sich in D_2'. Es ist nun

$$Q = \frac{27b^6 - 324b^4c^2 + 720b^2c^4 + 64c^6}{864b^3};$$

Für x_1 bekommen wir demnach den Ausdruck

$$x_1 = \frac{3b^2 + 4c^2}{6b} + 2\sqrt[3]{-\frac{Q}{2}} \quad \text{oder}$$

$$x_1 = \frac{3b^2 + b^2(6\sqrt{3} - 9)}{6b} - b(2 - \sqrt{3}) = (2\sqrt{3} - 3)b,$$

wenn wir für c obigen Wert einsetzen.

$$x_2 = x_3 = \frac{3b^2 + b^2(6\sqrt{3} - 9)}{6b} + \frac{b}{2}(2 - \sqrt{3}) = \frac{b}{2}\sqrt{3}.$$

Setzen wir diese Werte in der Kreisgleichung ein, so erhalten wir

$$y_1 = b\sqrt{14\sqrt{3} - 24};$$

$$y_2 = y_3 = \frac{b}{2}\sqrt{2\sqrt{3} - 3}.$$

Dem Schnittpunkt $D_1'(x_1 y_1)$ entspricht das *spitzwinklige Dreieck* OAB_1' und dem Berührungspunkt $D_2'(x_2 y_2)$ das doppelt gelegte *stumpfwinklige Dreieck* OAB_2'.

Um zu untersuchen, ob letzteres Dreieck eine besondere Eigenschaft besitze, wie zu vermuten ist, berechnen wir zunächst seine Basishöhe.

Wir können die Proportion aufstellen:

$$h_b : \frac{b}{2}\sqrt{2\sqrt{3} - 3} = \frac{b}{2} : \frac{b}{2}\sqrt{3};$$

$$h_b = \frac{b}{6}\sqrt{6\sqrt{3} - 9}.$$

Nun ist $h_b + n = c = \frac{b}{2}\sqrt{6\sqrt{3} - 9}$; folglich ist

$$h_b = \frac{c}{3} = \frac{n}{2}.$$

Das Dreieck besitzt also die Eigentümlichkeit, dass der äussere Schenkelabschnitt n das Doppelte der Basishöhe beträgt. Für seine Fläche erhalten wir den Ausdruck

$$F_{OAB_2'} = \frac{b}{12}\sqrt{6\sqrt{3} - 9}. \qquad (14)$$

Die Basishöhe des spitzwinkligen Dreiecks OAB_1' lässt sich aus der Proportion berechnen

$$h_b : b\sqrt{14\sqrt{3}-24} = \frac{b}{2} : (2\sqrt{3}-3)\,b,$$

woraus

$$h_b = \frac{b}{3}\sqrt{42\sqrt{3}-72} + \frac{b}{2}\sqrt{14\sqrt{3}-24}$$
$$= 0{,}53728\cdots\cdot b.$$

Es wird demnach

$$F_{OAB_1'} = 0{,}26864\cdots b^2. \qquad (15)$$

3. $\frac{b}{2}\sqrt{6\sqrt{3}-9} > c > \frac{b}{2}$.

Die Diskriminante ist negativ. Wir erhalten 3 reelle und unter sich verschiedene Wurzeln, daher auch 3 reelle Schnittpunkte D und 3 reelle Lösungen. Der Schnittpunkt des aufsteigenden Kurvenastes erzeugt *ein spitzwinkliges Dreieck*, in welchem $h_b + n = c$. Die zwei Schnittpunkte des absteigenden Astes liefern *zwei stumpfwinklige Dreiecke.*

Im ersten ist $h_b > n$, $c = \text{pos.}$
Im zweiten ist $h_b < n$, $c = \text{neg.}$

B. $c = \frac{b}{2}$.

Der Grundkreis schneidet die Kurve im Doppelpunkt $E\left(\frac{b}{2}, \frac{b}{2}\right)$ und im Punkt A (b, 0). In E fallen 2 Schnittpunkte zusammen, was der Fall sein muss, da die Diskriminante $\Delta = 0$ wird. Dieser Spezialfall liefert 3 reelle Lösungen:

1. Ein *doppelt gelegtes rechtwinkliges Dreieck*, für welches $n = 0$ wird und $h_b = \frac{b}{2}$.
2. Ein *unendlich kleines, auf die Basis reduziertes Dreieck* O C A, weil der Fusspunkt der Schenkelhöhe auf A, also in die Basis fällt, wodurch die Höhe $h_b = 0$ werden muss.

C. $c < \frac{b}{2}$; Taf. I, Fig. 3.

Die Lösungen sind dieselben wie in Fall A_3 mit dem Unterschied, dass das zweite stumpfwinklige Dreieck seine Spitze nach unten kehrt.

Ist speziell $c = 0$, so verschwindet die Diskriminante. Die Kurve ist die Strophoide. Wir bekommen 3 Schnittpunkte, von denen zwei D_1 und D_2 symmetrisch zur x-Axe liegen. Der Schnittpunkt D_3 und damit der Fusspunkt der Schenkelhöhe des bedingten Dreiecks fällt in den Nullpunkt. Der Schenkel muss somit senkrecht auf der Basis stehen. Wir erhalten *ein unendlich grosses Dreieck,* in welchem $h_b = n = \infty$ ist.

Die Schnittpunkte $D_1\left(\frac{3b}{4}, \frac{b}{4}\sqrt{3}\right)$ und $D_2\left(\frac{3b}{4}, -\frac{b}{4}\sqrt{3}\right)$ erzeugen *2 kongruente,* symmetrisch zur x-Axe gelegene *stumpfwinklige Dreiecke* OAB. Im $\triangle$ OAB ist $h_b = n = \frac{s}{2}$; somit ist

$$\sin \alpha = \frac{1}{2}$$

$$\alpha = 30^0.$$

Der Basiswinkel misst also 30^0.

Aus der Proportion

$$h_b : \frac{b}{4}\sqrt{3} = \frac{b}{2} : \frac{3b}{4}$$

finden wir

$$h_b = \frac{b}{6}\sqrt{3};$$

somit wird

$$F_{OAB} = F_{OAB_1} = \frac{b^2}{12}\sqrt{3}. \qquad (16)$$

Für negative c gewinnen wir keine neuen Lösungen. Die Dreiecke werden einfach in Bezug auf die x-Axe Spiegelbilder derjenigen, die wir für positive c erhalten haben.

§ 4. *Zweites Lösungsverfahren. Bestimmung der Spitze B des gleichschenkligen Dreiecks.*

Es gelten natürlich auch hier die Voraussetzungen des § 2.

a) Konstruktion der Hilfskurve.

Es sei (siehe Figur 5, Taf. I) $OA = b$ die gegebene Basis. Wir ziehen durch C die Mittelsenkrechte MM_1 dazu und tragen auf derselben von C aus $h_b \pm n = c$ ab und erhalten den festen Punkt E. Über OA schlagen wir ferner den Grundkreis. Nun

ziehen wir durch O Strahlen, die den Grundkreis in Q schneiden. Für jeden Strahl bestimmen wir nach den Gesetzen des gleichschenkligen Dreiecks einen Punkt P so, dass

$$PQ = PE.$$

Die Verbindungslinie aller Punkte P ist die gesuchte Kurve. Sie ist also der geometrische Ort eines Strahlpunktes, der vom Schnittpunkt Q des Strahls mit dem Grundkreis und einem festen Punkt E der Mittelsenkrechten gleichen Abstand hat. Die Schnittpunkte der Kurve mit der Mittelsenkrechten, also mit der Geraden $x = \frac{b}{2}$ sind die gesuchten Dreiecksspitzen B; denn

$EB = BQ = n$ nach Konstruktion;
$BC = h_b$; also
$h_b + n = BC + BE = CE = c$ nach Voraussetzung.

Liegt der Schnittpunkt B der Kurve mit der Mittelsenkrechten zwischen C und E, so gilt beim Dreieck die Relation

$$h_b + n = c.$$

Fällt B auf E, so haben wir

$$h_b \pm n = c.$$

Liegt endlich B ausserhalb E, so gilt

$$h_b - n = c.$$

b) Ableitung der Kurvengleichuug.

Zu diesem Zweck legen wir das rechtwinklige Koordinatensystem so, dass der Punkt O zum Nullpunkt und die Basis OA samt deren Verlängerung zur positiven x-Axe wird. Die Koordinaten des Punktes P seien x und y. Es ist nun

$$OQ + QP = \sqrt{x^2 + y^2}; \qquad (\alpha)$$

$$\left.\begin{aligned} OQ &= b\cos\varphi; \\ QP = PE &= \sqrt{\left(x - \frac{b}{2}\right)^2 + (c-y)^2}; \end{aligned}\right\} \text{ sub. in } (\alpha);$$

wir erhalten

$$b\cos\varphi + \sqrt{\left(x - \frac{b}{2}\right)^2 + (c-y)^2} = \sqrt{x^2 + y^2};$$

$$\frac{bx}{\sqrt{x^2+y^2}} + \sqrt{\left(x - \frac{b}{2}\right)^2 + (c-y)^2} = \sqrt{x^2 + y^2};$$

quadriert man noch und bringt auf Null, so ist das Resultat

$$(x^2 + y^2)(bx - 2cy) + \left(c^2 - \frac{3b^2}{4}\right)x^2 + \left(c^2 + \frac{b^2}{4}\right)y^2 = 0. \qquad (17)$$

c) Diskussion der Kurve.

Die Kurve hat im Nullpunkt einen Doppelpunkt; denn die Gleichung beginnt mit Gliedern 2. Grades. Als *Gleichung der Tangenten im Nullpunkt* erhalten wir

$$y = \pm x \sqrt{\frac{3b^2 - 4c^2}{b^2 + 4c^2}}. \tag{18}$$

Spezialwerte: 1. Für $c = 0$ wird

$$y = \pm x\sqrt{3}.$$

Die Doppelpunktstangenten bilden mit der x-Axe Winkel von $\pm 60°$.

2. Für $c = \frac{b}{2}$ wird

$$y = \pm x.$$

Die beiden Tangenten bilden mit der x-Axe Winkel von $\pm 45°$.

3. Für $c = \frac{b}{2}\sqrt{3}$ wird

$y = 0$, d. h. die beiden Doppelpunktstangenten fallen zusammen; die x-Axe wird Rückkehrtangente und der Nullpunkt Spitze.

4. Für $c > \frac{b}{2}\sqrt{3}$ wird $y =$ imaginär, d. h. der Doppelpunkt wird zum isolierten Punkt.

Wir setzen $y = 0$ und erhalten die Schnittpunkte der Kurve mit der x-Axe

$$b x^3 + \left(c^2 - \frac{3b^2}{4}\right) x^2 = 0;$$

$$x_1 = x_2 = 0;$$

$$x_3 = \frac{3b^2 - 4c^2}{4b}.$$

Die 3. Abscisse bleibt positiv, so lange $c \lessgtr \frac{b}{2}\sqrt{3}$. Sie wird also negativ, wenn der Doppelpunkt isolierter Punkt wird.

$x = 0$ gesetzt, ergiebt die Schnittpunkte mit der y-Axe:

$$-2cy^3 + \left(c^2 + \frac{b^2}{4}\right) y^2 = 0;$$

$$y_1 = y_2 = 0;$$

$$y_3 = \frac{b^2 + 4c^2}{8c}.$$

Die dritte Ordinate hat das Vorzeichen von c.

Wir machen die Gleichung mit z homogen, setzen dann $z = 0$ und erhalten

$$U_n = U_3 = (x^2 + y^2)(bx - 2cy) = 0;$$

daraus folgt:

1. $y = \frac{bx}{2c}$;
2. $y = \pm ix$.

Wir erhalten somit eine reelle und 2 imaginäre Asymptotenrichtungen. Die Kurve geht durch die imaginären Kreispunkte der Ebene.

Die reelle Asymptotenrichtung lässt sich konstruktiv leicht bestimmen. Wir errichten über O E als Durchmesser einen Kreis, welcher durch C gehen muss und den Grundkreis in Q schneidet. Die Verbindungsgerade O Q ist die gesuchte Asymptotenrichtung. Ist φ der Richtungswinkel derselben, so ist zu beweisen, dass

$$\operatorname{tg}\varphi = \frac{p}{b/2} = \frac{b}{2c}; \text{ siehe Fig. 2.} \qquad (\alpha)$$

Nach dem Sehnensatz ist im Kreis über O E:

$$p(c - p) = rv$$

und im Grundkreis:

$$\left(\frac{b}{2} + p\right)\left(\frac{b}{2} - p\right) = rv; \text{ folglich}$$

$$cp - p^2 = \frac{b^2}{4} - p^2, \text{ woraus}$$

$$p = \frac{b^2}{4c}.$$

Setzen wir diesen Wert in (α) ein, so wird

$$\operatorname{tg}\varphi = \frac{b^2}{4c} : \frac{b}{2} = \frac{b}{2c}.$$

Die reelle Asymptotenrichtung ist identisch mit dem Strahl, für welchen der Punkt P ins Unendliche fällt; dies geschieht, wenn

$$EQ \perp \text{Strahl } OQ.$$

Die Gleichung der Asymptote selbst wird

$$bx - 2cy + \frac{(b^2 - 4c^2)^2}{4(b^2 + 4c^2)} = 0;$$

$$y = \frac{b}{2c}x + \frac{(b^2 - 4c^2)^2}{8c(b^2 + 4c^2)}. \qquad (19)$$

Die Asymptote schneidet die y-Axe bei positivem c auf der positiven, bei negativem c auf der negativen Seite. Um sie zu

konstruieren, bestimmen wir zuerst den Abschnitt auf der y-Axe. Ist der Schnittpunkt mit der y-Axe gefunden, so zieht man durch denselben eine Parallele zu OQ′ (siehe Fig. 5, Taf. I). Der Abschnitt auf der y-Axe ist konstruktiv leicht zu gewinnen, wenn wir dem konstanten Glied in der Asymptotengleichung die Form geben:

$$\frac{(b^2-4c^2)^2}{8c(b^2+4c^2)} = \frac{1}{8c}\cdot\left(\frac{b^2-4c^2}{\sqrt{b^2+4c^2}}\right)^2.$$

Spezialwerte: 1. Für $c = 0$ nimmt die Gleichung der Asymptote die Form an

$$x = -\frac{b}{4}.$$

Die Asymptote steht senkrecht auf der x-Axe.

2. $c = \frac{b}{2}$;

Asymptote: $y = x$.

Sie geht in diesem Spezialfall durch den Nullpunkt und bildet mit der x-Axe einen Winkel von 45°.

3. $c = \frac{b}{2}\sqrt{3}$;

Asymptote: $y = \frac{1}{3}x\sqrt{3} + \frac{b}{12}\sqrt{3}$.

Die Asymptote bildet mit der x-Axe einen Winkel von 30°

4. $c = \infty$; dann wird auch

$y = \infty$, d. h. die Asymptote verläuft parallel der x-Axe im Unendlichen.

Durchläuft c alle Werte von 0 bis ∞, so dreht sich die Asymptote um 90° von der Richtung der y-Axe zur Richtung der x-Axe.

So lange der Nullpunkt Doppelpunkt oder Rückkehrpunkt ist, besitzt die Kurve *einen reellen Wendepunkt*. Sie hat deren *drei*, wenn der Nullpunkt isolierter Punkt wird.

Wir weisen noch darauf hin, dass die Kurve ebenfalls *rational* ist.

Wir betrachten nun noch die verschiedenen Kurven, die einem veränderlichen c entsprechen; ihre Doppelpunktstangenten haben wir bereits untersucht.

Ist $c > \frac{b}{2}\sqrt{3}$, so wird der Nullpunkt isolierter Punkt.

Ist $c < \frac{b}{2}\sqrt{3}$, » » » » Doppelpunkt.

Ist $c = \frac{b}{2}\sqrt{3}$, » » » » Rückkehrpunkt.

Im letztern Fall wird die Gleichung der Kurve:

$$(x^2+y^2)(x-\sqrt{3}\,y)+by^2=0 \qquad (20)$$

$y=0$ ist, wie wir schon gesehen haben, Rückkehrtangente.

Wenn $c=\frac{b}{2}$, so lautet die Kurvengleichung:

$$(x^2+y^2)(x-y)-\frac{b}{2}(x^2-y^2)=0$$

oder

$$\left[x^2+y^2-\frac{b}{2}(x+y)\right](x-y)=0; \qquad (21)$$

daraus folgt:

1. $y=x$;
2. $x^2+y^2-\frac{b}{2}x-\frac{b}{2}y=0$.

Die Kurve zerfällt also in einen Kreis und in eine Gerade, welche diametral den Kreis schneidet. Die Gerade ist zugleich noch Asymptote der Kurve.

Die Kreisgleichung in der Normalform lautet:

$$\left(x-\frac{b}{4}\right)^2+\left(y-\frac{b}{4}\right)^2=\frac{b^2}{8}.$$

Die Koordinaten des Kreismittelpunktes G sind somit $\left(\frac{b}{4}, \frac{b}{4}\right)$. Der Punkt G fällt also in die Gerade $y=x$ und liegt in der Mitte zwischen O und E. Der Radius des Kreises ist $r=\frac{b}{4}\sqrt{2}$.

Wenn $c=0$, so heisst die Gleichung der Kurve:

$$(x^2+y^2)x-\frac{b}{4}(3x^2-y^2)=0. \qquad (22)$$

Die Kurve gleicht der Strophoide. Ihre Asymptote $x=-\frac{b}{4}$ ist ebenfalls Wendetangente. Von der eigentlichen Strophoide

weicht sie darin ab, dass ihre Doppelpunktstangenten nicht senkrecht aufeinander stehen; siehe Fig. 5.

Für negative c bekommen wir die gleichen Kurven wie für positive c. Nur sind sie wieder Spiegelbilder der letztern in Bezug auf die x-Axe. Durchläuft daher C alle Werte von $-\infty$ bis $+\infty$, so liegen die entstehenden Kurven paarweise symmetrisch zur x-Axe. Die Grenzkurve, für welche $c = 0$, steht zwischen den Paaren.

Kurven-Schema:

1. $c = \infty$.	Die Kurve besteht aus dem Nullpunkt O und der zur x-Axe parallelen unendlich fernen Geraden.
2. $c > \frac{b}{2}\sqrt{3}$.	Der Nullpunkt ist solierter Punkt, 3 reelle Wendepunkte, Asymptotenrichtungswinkel $< 30°$.
3. $c = \frac{b}{2}\sqrt{3}$.	Nullpunkt ist Spitze, ein reeller Wendepunkt, Asymptotenrichtungswinkel $= 30°$; siehe Fig. 5.
4. $c < \frac{b}{2}\sqrt{3}$.	Nullpunkt ist Doppelpunkt, ein reeller Wendepunkt, Asymptotenrichtungswinkel $> 30°$.
aa) $c > \frac{b}{2}\sqrt{6\sqrt{3}-9}$.	Schleife reicht nicht bis an die Mittelsenkrechte.
bb) $c = \frac{b}{2}\sqrt{6\sqrt{3}-9}$.	Schleife berührt die Mittelsenkrechte.
cc) $\frac{b}{2}\sqrt{6\sqrt{3}-9} > c > \frac{b}{2}$.	Schleife schneidet die Mittelsenkrechte. Beide Schnittpunkte liegen oberhalb der Basis OA.
dd) $c = \frac{b}{2}$.	Kurve zerfällt in einen Kreis und in eine Gerade, welche mit der Asymptote zusammenfällt. Die Asymptote bildet mit der x-Axe einen Winkel von $45°$.

ee) $\frac{b}{2} > c > 0$. Wie cc, nur liegt ein Schnittpunkt unterhalb der Basis. Asymptotenrichtungswinkel zwischen 45° und 90°.

ff) $c = 0$. Kurve eine Art von Strophoide, liegt symmetrisch zur x-Axe. Asymptotenrichtungswinkel=90°.

d) Die Lösungen der Konstruktionsaufgabe.

Wir haben die Schnittpunkte B der Mittelsenkrechten mit der Kurve zu bestimmen. Wir bekommen im Maximum 3 Schnittpunkte, also auch 3 Lösungen. Führen wir den Wert für x aus der Gleichung der Mittelsenkrechten $x = \frac{b}{2}$ in der Kurvengleichung (17) ein, so erhalten wir

$$\left(\frac{b^2}{4} + y^2\right)\left(\frac{b^2}{2} - 2cy\right) + \left(c^2 - \frac{3b^2}{4}\right)\frac{b^2}{4} + \left(c^2 + \frac{b^2}{4}\right)y^2 = 0,$$

reduziert:

$$y^3 - \frac{3b^2+4c^2}{8c}y^2 + \frac{b^2}{4}y + \frac{b^4-4b^2c^2}{32c} = 0. \qquad (23)$$

Die Wurzeln dieser Gleichung sind die Ordinaten der Schnittpunkte B.

Die Diskriminante Δ dieser kubischen Gleichung lautet

$$\Delta = \frac{b^2}{27\cdot 64^2 c^4}(-27b^8 + 288b^6c^2 - 992b^4c^4 + 1024b^2c^6 + 256c^8).$$

$$= \frac{b^2}{27\cdot 64^2 c^4}(4c^2 - b^2)^2(16c^4 + 72b^2c^2 - 27b^4).$$

Die Diskriminante verschwindet somit, wenn

1. $b = 0$,
2. $c = \frac{b}{2}$ und
3. $c = \frac{b}{2}\sqrt{6\sqrt{3}-9}$.

Fall (1) $b = 0$ fällt ausser Betracht, da b nicht variieren soll. Die Diskriminante wird demnach für 2 Spezialwerte von c zu Null. Wir stossen somit auf das ganz gleiche Resultat wie beim ersten Lösungsverfahren. Nach beiden Verfahren bekommen

wir zusammenfallende Schnittpunkte und Lösungen für die Werte $c = \frac{b}{2}$ und $c = \frac{b}{2}\sqrt{6\sqrt{3}-9}$. Allerdings verschwand die Diskriminante im ersten Fall auch für den Wert $c=0$ (siehe pag. 89); allein dort fielen bloss die Abscissen zweier Schnittpunkte zusammen, die Ordinaten nicht; diese differierten im Vorzeichen; daher gab es keinen Berührungspunkt. Im vorliegenden Fall, wo wir die Ordinaten der Schnittpunkte B der Kurve mit der Mittelsenkrechten suchen, kann daher für $c=0$ Δ nicht $=0$ werden.

Für $b=0$ zerfällt überdies die Kurve in die reelle Gerade

$$y = \frac{c}{2}$$

und in die Geraden absoluter Richtung.

Was nun die Lösungen betrifft, so haben wir die nämlichen Hauptfälle mit denselben Unterfällen wie beim ersten Verfahren.

Ist $\Delta > 0$, wobei $c > \frac{b}{2}\sqrt{6\sqrt{3}-9}$ sein muss, so erhalten wir eine reelle Lösung.

Ist $\Delta < 0$, so giebt es 3 reelle und unter sich verschiedene Lösungen.

Wenn $\Delta = 0$ ist, was zweimal eintrifft, so fallen 2 von den 3 reellen Lösungen zusammen.

Wir verzichten auf eine ausführliche Darstellung der Lösungen. Wir wollen nur noch an einigen Spezialfällen zeigen, dass die beiden Verfahren in ihren Ergebnissen übereinstimmen.

$$A_2 \quad c = \frac{b}{2}\sqrt{6\sqrt{3}-9}.$$

Berechnen wir den zugehörigen Wert von y, so erhalten wir:

$$y_1 = \frac{3b^2 + b^2(6\sqrt{3}-9) + (2-\sqrt{3})12b^2}{12b\sqrt{6\sqrt{3}-9}}$$

$$= b\left(\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{6}\right)\sqrt{2\sqrt{3}+3} = 0{,}53728\cdots b$$

$$y_2 = y_3 = \frac{3b^2 + b^2(6\sqrt{3}-9) + (2-\sqrt{3})6b^2}{12b\sqrt{6\sqrt{3}-9}}$$

$$= b\left(\frac{\sqrt{3}}{3} - \frac{1}{2}\right)\sqrt{2\sqrt{3}+3}.$$

Nun ist $y_2 = y_3 = \frac{c}{3}$; denn

$$b\left(\sqrt{3} - \frac{3}{2}\right)\sqrt{2\sqrt{3}+3} = \frac{b}{2}\sqrt{6\sqrt{3}-9}.$$

Das spitzwinklige Dreieck hat also die Basishöhe $h_b = 0{,}53728\cdots b$ und das doppelt gelegte stumpfwinklige Dreieck die Basishöhe $h_b = \frac{c}{3}$; somit herrscht Übereinstimmung mit den Resultaten nach den ersten Verfahren (vergl. pag. 13)

$$\text{B. } c = \frac{b}{2}.$$

Wir bekommen als Ordinaten der Schnittpunkte B, d. h. als Basishöhe der entsprechenden Dreiecke, folgende Werte:

1. y_1 im $\triangle$ OAC $= \frac{4b^2}{12b} - \frac{b}{3} = 0$;
2. $y_2 = y_3$ für das doppelt gelegte rechtwinklige $\triangle$ OAE $=$ EC $= \frac{4b^2}{12b} + \frac{b}{6} = \frac{b}{2}$ (vergl. damit pag. 91).

$$C_2.\ c = 0;\ \text{Taf. I, Fig. 5.}$$

Wir gehen aus von der Gleichung (23), multiplizieren c im Nenner weg, setzen hierauf $c = 0$ und erhalten

$$-y^2 \cdot \frac{3b^2}{8} + \frac{b^4}{32} = 0$$

$$y = \pm\frac{b}{6}\sqrt{3}.$$

Der dritte Wert von y ist unendlich gross, da der Koeffizient von $y^3 = 0$ geworden ist. Wir bekommen daher auch hier für das unendlich grosse Dreieck die Basishöhe $h_b = \infty$ und für die 2 stumpfwinkligen Dreiecke OAB_1 und OAB_2 die Basishöhe $h_b = \pm\frac{b}{6}\sqrt{3}$ wie beim ersten Verfahren (siehe pag. 92).

II.

§ 5. *Zweite Aufgabe: Ein gleichschenkliges Dreieck zu konstruieren, wenn die Basis und die Summe oder Differenz aus Schenkel und dem an die Spitze angrenzenden Schenkelabschnitt gegeben sind.*

Gegeben: 1. b,
2. $s \pm n = \pm c =$ konstant.

Bedingungen:

1. $s + n \geqq \frac{b}{2}\sqrt{2}$,
2. $s - n \leqq \frac{b}{2}\sqrt{2} =$ pos.

Im rechtwinkligen Dreieck ist $n = 0$ und $s = \frac{b}{2}\sqrt{2}$. Wird das Dreieck spitzwinklig, so wachsen sowohl s als auch n; also muss $s + n > \frac{b}{2}\sqrt{2}$ sein. Für ein stumpfwinkliges Dreieck ziehen wir den Grundkreis und finden, dass $s + n > \frac{b}{2}\sqrt{2}$ wird nach dem Satz: In einem Kreise gehört zu einem grössern Bogen auch die grössere Sehne. $\frac{b}{2}\sqrt{2}$ ist somit das Minimum, das der Wert der Summe $s + n$ annehmen kann.

Was die 2. Bedingung betrifft, so erreicht die Differenz $s - n$ einen maximalen Wert beim rechtwinkligen Dreieck, wo

$$s - n = s - 0 = \frac{b}{2}\sqrt{2} \text{ ist.}$$

Bei einem spitzwinkligen Dreieck ist nämlich $s - n < \frac{b}{2}\sqrt{2}$ nach dem oben erwähnten Sehnensatz, und bei einem stumpfwinkligen Dreieck ist $\frac{b}{2}\sqrt{2}$ schon $>$ als s allein, umsomehr also $\frac{b}{2}\sqrt{2} > s - n$.

§ 6. *Erstes Lösungsverfahren. Bestimmung des Punktes D.*

a) Konstruktion der Hilfskurve. Taf. I, Fig. 4.

Mache OA gleich der gegebenen Basis b. Ziehe die Mittelsenkrechte MM_1. Schlage um O einen Hilfskreis, dessen Radius

$r = OH$ gleich der gegebenen Konstanten c ist. Ziehe durch O einen Strahl, welcher die Mittelsenkrechte in R und den Hilfskreis in H und H′ schneidet. Mache $RP = RH$

und $RP' = RH'$.

Dreht sich nun der Strahl OR um O, so beschreiben die Punkte P und P′ die Kurve. Die Schnittpunkte dieser Kurve mit dem Grundkreis liefern die gesuchten Fusspunkte D der Schenkelhöhe. Es ist nämlich $c = OH = OR + RH$. OR entspricht dem s; folglich muss $RH = RP$ den Schenkelabschnitt n bedeuten. Dieser Schenkelabschnitt erstreckt sich in Wirklichkeit nur von der Mittelsenkrechten bis zum Grundkreis. Wenn also der Kurvenpunkt P auf den Grundkreis fällt, so ist $RP = n$, $OR = s$, und wir haben eine Lösung der Aufgabe.

Schneidet der Strahl eines Kurvenpunktes P die Mittelsenkrechte innerhalb des Hilfskreises O, so genügt P der Bedingung $OR + RP = s + n = OH = c$.

Für Kurvenpunkte P, deren entsprechende Strahlen die Mittelsenkrechte ausserhalb des Hilfskreises O schneiden, gilt die Relation: $OR - RP = s - n = OH = c$.

Für alle Strahlen haben wir endlich noch Kurvenpunkte P′, welche der Relation entsprechen:

$$RP' - OR = n - s = OH' = c.$$

Weil in einem gleichschenkligen Dreieck der an die Spitze grenzende Schenkelabschnitt n niemals grösser, höchstens gleich s werden kann, so kommt natürlich der Fall $n - s = c$ für die Lösung unserer Aufgabe nicht in Betracht. Der Kurvenzweig, auf dem die Punkte P′ liegen, liefert daher keine Lösungen unserer Aufgabe.

b) Ableitung der Kurvengleichung.

Wir wählen wieder O zum Nullpunkt eines rechtwinkligen Koordinatensystems und legen durch OA die positive x-Axe. Es seien x und y die Koordinaten eines Kurvenpunktes P, dessen Strahl den Richtungswinkel φ habe. Dann ist

$$y = OP \cdot \sin\varphi; \quad \cdots\cdots\cdots\cdots \quad (\alpha)$$

$$OP = OH - 2RP = c - 2RP;$$

somit $$y = (c - 2RP) \sin\varphi \quad \cdots\cdots\cdots \quad (\beta)$$

Ziehe $PN \perp MM_1$, so ist

$$PN = \frac{b}{2} - x.$$

$$RP = \frac{PN}{\cos\varphi} = \frac{\frac{b}{2} - x}{\cos\varphi}, \text{ sub. in } (\beta);$$

wir erhalten $$y = \left(c - \frac{\left(\frac{b}{2} - x\right)2}{\cos\varphi}\right) \sin\varphi;$$

$$y = (c\cos\varphi - b + 2x)\,\frac{y}{x};$$

$$\frac{cx}{\sqrt{x^2 + y^2}} = b - x;$$

$$(x^2 + y^2)(b - x)^2 - c^2x^2 = 0 \quad . \qquad (1)$$

In Polarkoordinaten: $$r = \frac{b}{\cos\varphi} \mp c. \qquad (1a)$$

Unsere Kurve ist somit die Konchoide des Nikomedes.

Die x-Axe ist Symmetrieaxe und die Asymptote $x = b = LA$ die Leitlinie.

$c > b$; der Nullpunkt ist Doppelpunkt;
$c = b$; » » » Spitze;
$c < b$; » » » isolierter Punkt.

Es bleibt nur noch nachzuweisen, dass nach der gewöhnlichen Definition der Nikomedischen Konchoide

$$PV = VP' = c \text{ ist.}$$

Nach Konstruktion ist

$$RP' - OR = c.$$

Nun ist $$OR = RV,$$

also $$RP' - RV = VP' = c. \qquad (\gamma)$$

Ferner ist nach Konstruktion

$$OR + PR = c;$$

für OR kann man RV setzen; also ist

$$RV + RP = PV = c. \qquad (\delta)$$

Aus (γ) und (δ) folgt, dass

$$PV = P'V = c \text{ ist.}$$

Wir haben also die Nikomedische Konchoide nicht mit Hilfe der Leitlinie, sondern mit Hilfe der zwischen dem festen Punkt O und der Leitlinie gelegenen Mittelparallelen MM_1 und einem

Kreis konstruiert. Die Basis b des zu konstruierenden gleichschenkligen Dreieckes ist der Abstand des festen Punktes O von der Leitlinie AL.

c) Die Lösungen unserer Aufgabe.

Wir haben die Schnittpunkte D der Kurve mit dem Grundkreis zu bestimmen. Die Koordinaten der Punkte D sind die Wurzeln des Gleichungssystems:

1. $(x^2+y^2)(x-b)^2-c^2x^2=0$; Gleichung der Kurve.
2. $x^2-bx+y^2=0$; » des Grundkreises.

Aus (2) folgt $y=\sqrt{x(b-x)}$, sub. in (1); wir erhalten $bx(x-b)^2-c^2x^2=0$,

oder
$$b(x-b)^2-c^2x=0. \qquad (2)$$

Die Wurzeln dieser quadratischen Gleichung sind die Abscissen der Schnittpunkte D. Wir erhalten statt 8 Schnittpunkte nur zwei, weil beide Kurven durch die unendlich fernen imaginären Kreispunkte der Ebene gehen, weil ferner zwei Schnittpunkte in den Nullpunkt fallen und weil endlich y nur in der 2. Potenz vorkommt.

Gleichung (2) nach x aufgelöst giebt

$$x=\frac{2b^2+c^2\pm c\sqrt{4b^2+c^2}}{2b}.$$

Nun ist $y=\sqrt{x(b-x)}$;

x darf also höchstens = b werden; sonst werden die Schnittpunkte imaginär. Dies folgt übrigens schon aus der Konstruktion. Wir können daher im Ausdruck für x, den Spezialfall $c=0$ ausgenommen, nur das negative Zeichen der Wurzel brauchen. Es wird somit der Ausdruck für die Abscisse von D

$$x=\frac{2b^2+c^2-c\sqrt{4b^2+c^2}}{2b}; \text{ dann wird} \qquad (3)$$

$$y=\pm\frac{1}{2b}\sqrt{2c\left\{(b^2+c^2)\sqrt{4b^2+c^2}-(3b^2c+c^3)\right\}}. \qquad (4)$$

Weil das Wurzelzeichen unter der Wurzel nur eindeutig genommen werden darf, so erhalten wir für y 2 Werte, die sich nur im Vorzeichen unterscheiden. Wir erhalten somit 2 reelle Schnittpunkte D, welche symmetrisch zur x-Axe liegen. Dies bedingt ferner als Lösungen 2 gleichschenklige Dreiecke, welche

kongruent sind und eine symmetrische Lage zur gemeinsamen Basis b haben.

Bei variablem c erhalten wir folgende Hauptfälle unter den Lösungen:

$$\text{A.} \quad c > \frac{b}{2}\sqrt{2}.$$

Die Abscisse der Schnittpunkte D und D_1 ist $< \frac{b}{2}$. Die entstehenden Dreiecke sind somit spitzwinklig und genügen der Bedingung:

$$s + n = c.$$

1. Unterfall $c > \frac{3b}{2}$.

Der Dreieckswinkel an der Spitze bei B ist $< 60^0$. Ist speziell $c = \infty$, so fallen die Punkte D und D_1 zusammen in den Nullpunkt. Es entstehen 2 unendlich grosse Dreiecke.

2. Unterfall $c = \frac{3b}{2}$.

Es wird $x = \frac{b}{4}$ und $y = \pm\frac{b}{2}\sqrt{3}$.

Die Dreiecke sind gleichseitig.

3. Unterfall $\frac{3b}{2} > c > \frac{b}{2}\sqrt{2}$. Taf. I, Fig. 4.

Spitzwinklige Dreiecke, deren Winkel an der Spitze zwischen 60^0 und 90^0 liegt.

$$\text{B.} \quad c = \frac{b}{2}\sqrt{2} = \text{Grenzfall.}$$

Es wird $x = \frac{b}{2}$ und $y = \pm\frac{b}{2}$.

Die Dreiecke sind rechtwinklig und erfüllen die Bedingung:

$$s \pm n = c; \quad n = 0.$$

$$\text{C.} \quad c < \frac{b}{2}\sqrt{2}.$$

Es wird $x > \frac{b}{2}$; dies hat zur Folge, dass die Dreiecke stumpfwinklig werden. Für dieselben gilt die Relation:

$$s - n = c.$$

Wird speziell $c = 0$, so fallen die Schnittpunkte D und D^1 zusammen auf A (b, 0), und da jeder doppelt zu nehmen ist, so erhalten wir als Lösungen 4 unendlich kleine Dreiecke, die sich auf die Basis reduzieren.

§ 7. *Zweites Lösungsverfahren. Bestimmung der Punkte B.*

Es gelten die Voraussetzungen des § 5.

a) Konstruktion der Hilfskurve. (Ohne Figur.) Mache $OA =$ der gegeben Basis b. Ziehe den Grundkreis. Schlage ferner einen Hilfskreis um O, dessen Radius $r = OH = c$, der gegebenen Konstanten. Lege nun durch O einen Strahl, welcher den Grundkreis in Q und den Hilfskreis in H und H_1 schneidet. Halbiere die Strecken HQ und H_1Q in den Punkten P und P_1. Lassen wir den Strahl OQ um O sich drehen, so erzeugen die Punkte P und P_1 die gesuchte Kurve.

Es entspricht nun die Strecke OP, resp. OP_1 dem Schenkel s; folglich muss die Strecke PQ, resp. P_1Q dem Schenkelabschnitt n entsprechen, da n gleich dem Abstand des Schenkelendpunktes vom Grundkreis ist, gemessen auf dem zugehörigen Strahl.

Die Kurve ist der geometrische Ort eines Strahlpunktes, dessen Summe oder Differenz der Abstände vom Ursprung O und dem Grundkreis eine Konstante ist.

Da OP dem Schenkel s und P dem Endpunkt desselben entspricht, so haben wir in den Schnittpunkten der Kurve mit der Mittelsenkrechten die gesuchten Punkte B. Die innere Schleife liefert nur im Spezialfall $c = 0$ Schnittpunkte.

b) Abteilung der Kurvengleichung.

Wir erhalten, indem wir analog wie früher vorgehen, die Gleichung:

$$\left(x^2 + y^2 - \frac{b}{2}x\right)^2 - \frac{c^2}{4}(x^2 + y^2) = 0. \qquad (5)$$

Dies ist die Gleichung einer Kreiskonchoide.

$\frac{b}{2}$ ist der Durchmesser des erzeugenden festen Kreises und $\frac{c}{2}$ der konstante Abstand der Kurvenpunkte vom Grundkreis, gemessen auf den zugehörigen Strahlen. Die x-Axe ist Symmetrieaxe.

$c < b$; Nullpunkt ist Doppelpunkt,
$c = b$; » » Spitze,
die positive x-Axe ist Rückkehrtangente.
$c > b$; Nullpunkt ist isolierter Punkt.

In Polarkoordinaten lautet die Gleichung der Kurve:

$$r = \frac{b}{2}\cos\varphi \pm \frac{c}{2}. \tag{6}$$

c) Die Lösungen der Aufgabe.

Wir ziehen die Mittelsenkrechte, da es sich um deren Schnittpunkte B mit der Kurve handelt. Die Abscisse aller dieser Punkte ist $x = \frac{b}{2}$. Führt man diesen Wert für x in der Kurvengleichung (5) ein, so erhält man eine Gleichung in y, deren Wurzeln die Ordinaten der Schnittpunkte B, der Spitzen der gesuchten gleichschenkligen Dreiecke sind. Diese Gleichung lautet:

$$y^4 - \frac{c^2 y^2}{4} - \frac{b^2 c^2}{16} = 0.$$

Die Gleichung, zunächst nach y^2 aufgelöst, ergiebt

$$y^2 = \frac{c^2 \pm c\sqrt{4b^2 + c^2}}{8}.$$

Da y nicht imaginär werden darf, so ist nur das positive Zeichen der Wurzel zu gebrauchen mit Ausnahme des Spezialfalles $c = 0$; daraus folgt

$$y = \pm\frac{1}{2}\sqrt{\frac{c^2 + c\sqrt{4b^2 + c^2}}{2}}. \tag{7}$$

Man erhält demnach 2 Schnittpunkte, welche symmetrisch zur x-Axe liegen. Dies bedingt als Lösungen im allgemeinen 2 kongruente symmetrisch zur Basis gelegene Dreiecke. Die Lösungen sind spitzwinklig, rechtwinklig oder stumpfwinklig, je nachdem

$$c \gtreqless \frac{b}{2}\sqrt{2} \text{ ist.}$$

Das zweite Lösungsverfahren führt zu denselben Ergebnissen wie das erste. (Vergleiche damit die Resultate auf pag. 106 und 107.) Wir verzichten darauf, die Übereinstimmung für Spezial-

fälle nachzuweisen. Wir erlauben uns nur noch, die allgemeine Formel für die Dreiecksfläche zu bringen. Es wird

$$F_{AOB} = \frac{b}{4}\sqrt{\frac{c^2 + c\sqrt{4b^2+c^2}}{2}}. \qquad (8)$$

Speziell für $c = \frac{3b}{2}$ entsteht ein gleichseitiges Dreieck; es wird $F = \frac{b}{4}\sqrt{\frac{\frac{9b^2}{4} + \frac{3b}{2}\sqrt{4b^2+\frac{9b^2}{4}}}{2}} = \frac{b^2}{4}\sqrt{3}.$

III.

§ 8. *Dritte Aufgabe: Konstruktion eines gleichschenkligen Dreiecks, wenn die Basis und die Summe oder Differenz aus Schenkelhöhe und dem an die Spitze angrenzenden Schenkelabschnitt gegeben sind.*

Gegeben: 1. b;
2. $h_s \pm n = \pm c$ = konstant.

Bedingungen: 1. $h_s + n \geqq \frac{b}{2}$;

2. $h_s - n \lessgtr + \frac{b}{2}\sqrt{2}$.

Die Summe $h_s + n$ wird ein Mimimum bei einem unendlich kleinen Dreieck; denn da ist $h_s = 0$ und $n = \frac{b}{2}$, also $h_s + n = \frac{b}{2}$.

Die Differenz $h_s - n$ erreicht das Maximum bei einem rechtwinkligen Dreieck, bei welchen $h_s = \frac{b}{2}\sqrt{2}$ und $n = 0$, also $h_s - n = \frac{b}{2}\sqrt{2}$.

§ 9. *Erstes Lösungsverfahren: Bestimmung der Spitze B des gleichschenkligen Dreiecks.*

a) Konstruktion der Hilfskurve.

Es sei (siehe Figur 6, Tafel II) OA die gegebene Basis b. Ziehe den Grundkreis. Schlage ferner um A einen Hilfskreis, dessen Radius $r = AH = c$ ist. Lege durch O einen Strahl, welcher den Grundkreis in Q schneidet. Fälle von A aus ein Lot auf diesen Strahl, das durch Q gehen muss und das den Hilfskreis in H und H_1 schneidet. Trage nun auf dem Strahl OQ

von Q aus die Strecke QH nach der entgegengesetzten Seite von O, die Strecke QH_1 nach der gleichen Seite ab und erhalte so 2 Punkte P und P_1, so dass

$$AQ + QP = AQ + QH = AH = c$$
$$\text{und } QP_1 - QA = QH_1 - QA = AH_1 = c.$$

Lässt man den Strahl OQ um O sich drehen, so beschreiben die Punkte P und P_1 die gesuchte Kurve. Ziehen wir also in einem Kreise durch den einen Endpunkt O eines Durchmessers Strahlen, die den Kreis in Q schneiden, so ist unsere Kurve der geometrische Ort solcher Strahlpunkte, für die die Summe oder Differenz der Abstände des Punktes Q vom Kurvenpunkt P einerseits und andererseits vom andern Endpunkt A des Durchmessers eine Konstante ist.

Die Summe der Abstände entspricht der Relation:

$$h_s + n = c,$$

die Differenz dagegen der Bedingung:

$$h_s - n = \pm c.$$

Fällt ein Kurvenpunkt P auf die Mittelsenkrechte MM_1, so wird $QP = n$ und $QA = h_s$; folglich haben wir in den Schnittpunkten der Kurve mit der Mittelsenkrechten die gesuchten Punkte B, d. h. die Spitzen der gleichschenkligen Dreiecke.

b) Ableitung der Kurvengleichung.

Lage des rechtwinkligen Koordinatensystems wie früher. x und y seien die Koordinaten des Punktes P; dann ist

$$(OQ + QP)^2 = x^2 + y^2; \qquad (\alpha)$$

$$\left.\begin{aligned} OQ &= b\cos\varphi; \\ QP &= c - QA = c - b\sin\varphi, \end{aligned}\right\} \text{ sub. in } (\alpha);$$

wir erhalten

$$(b\cos\varphi + c - b\sin\varphi)^2 = x^2 + y^2;$$

$$\frac{bx}{\sqrt{x^2+y^2}} + c - \frac{by}{\sqrt{x^2+y^2}} = \sqrt{x^2+y^2};$$

$$[x^2 + y^2 + b(y - x)]^2 - c^2(x^2 + y^2) = 0. \qquad (1)$$

$$\text{Polargleichung: } r = b(\cos\varphi - \sin\varphi) \pm c. \qquad (2)$$

Gleichung (1) ist die Gleichung einer Kreiskonchoide, deren Symmetrieaxe mit der positiven x-Axe einen Winkel von $-45°$ bildet.

$c < b\sqrt{2}$; der Nullpunkt ist Doppelpunkt;
$c = b\sqrt{2}$; » » » Spitze;
$c > b\sqrt{2}$; » » » isolierter Punkt.

Ist $c = 0$, so lautet die Kurvengleichung:

$$(x^2 + y^2 + by - bx)^2 = 0.$$

Die Kurve zerfällt in zwei aufeinanderfallende Kreise. Die Gleichung eines Kreises in Normalform heisst

$$\left(x - \frac{b}{2}\right)^2 + \left(y + \frac{b}{2}\right)^2 = \frac{b^2}{2}.$$

Die Mittelpunktskoordinaten sind $\left(\frac{b}{2}, -\frac{b}{2}\right)$, und der Radius des Kreises ist $r = \frac{b}{2}\sqrt{2}$.

Um die Gleichung der Kurve in normaler Form zu erhalten, führen wir eine negative Drehung der Axen um 45° aus. Es ergeben sich daher folgende Transformationsformeln:

1. $x = x'\cos\varphi + y'\sin\varphi$;
2. $y = -x'\sin\varphi + y'\cos\varphi$.

Weil $\sin\varphi = \cos\varphi = \frac{1}{2}\sqrt{2}$, so erhalten wir

3. $y - x = -x'\sqrt{2}$,
4. $x^2 + y^2 = x'^2 + y'^2$,

} sub in der Kurvengleichung (1); es resultiert:

$$(x'^2 + y'^2 - bx'\sqrt{2})^2 - c^2(x'^2 + y'^2) = 0. \qquad (4)$$

Der Durchmesser des erzeugenden festen Kreises ist also $b\sqrt{2}$. Ziehen wir durch O Strahlen, welche den festen Kreis in V schneiden, so liegen auf jedem Strahl zwei Kurvenpunkte U und W, welche von V den konstanten Abstand c haben.

c) Die Lösungen der Aufgabe.

Wir ziehen die Mittelsenkrechte $x = \frac{b}{2}$; denn ihre Schnittpunkte mit der Kurve liefern die Spitzen B der gesuchten gleichschenkligen Dreiecke. Alle diese Schnittpunkte haben die Abscisse $x = \frac{b}{2}$; es bleibt daher nur noch die Bestimmung der Ordinaten der Punkte B übrig. Zu diesem Zweck setzen wir den Wert für $x = \frac{b}{2}$ in der Kurvengleichung (1) ein und erhalten

$$\left(y^2+by-\frac{b^2}{4}\right)^2-c^2y^2-\frac{b^2c^2}{4}=0. \qquad (5)$$

Die Gleichung 4. Grades liefert 4 Wurzeln; somit erhalten wir 4 Schnittpunkte, was richtig ist, da eine Gerade eine Kurve 4. Ordnung in 4 Punkten schneiden kann.

Wir bringen (5) auf die Form

$$y^4+2by^3+\frac{b^2-2c^2}{2}y^2-\frac{b^3}{2}y+\frac{b^4-4b^2c^2}{16}=0,$$

setzen $y=z-\frac{b}{2}$, setzen ein und erhalten

$$z^4-(b^2+c^2)z^2+bc^2z+\frac{b^4-2b^2c^2}{4}=0. \qquad (\alpha)$$

Wir zerlegen die linke Seite in 2 Faktoren, wobei wir unbestimmte Koeffizienten anwenden, und setzen

$$(z^2+pz+t)(z^2-pz+u)=0, \qquad (\beta)$$

führen die angedeutete Multiplikation aus, vergleichen die Koeffizienten von (α) und (β), leiten eine Gleichung in p ab, setzen $p^2=v+\frac{2}{3}(b^2+c^2)$ und erhalten schliesslich folgende kubische Hilfsgleichung:

$$v^3-\frac{4b^4-4b^2c^2+c^4}{3}v-\frac{16b^6-24b^4c^2-15b^2c^4-2c^6}{27}=0. \qquad (6)$$

Die Diskriminante dieser Gleichung lautet:

$$\Delta=Q^2-\frac{4P^3}{27}=\frac{b^2c^4}{27}(4c^6+3b^2c^4+48b^4c^2-32b^6).$$

Diese Diskriminante verschwindet für folgende Werte von c:

$$\left.\begin{aligned}&1.\quad c=0\\&2.\quad c=\frac{b}{2}\sqrt{3\sqrt[3]{13+16\sqrt{2}}+3\sqrt[3]{13-16\sqrt{2}}-1}\\&\quad\;=0{,}787996\cdots\cdot b\end{aligned}\right\} \qquad (7)$$

Demnach bekommen wir 3 Hauptfälle für unsere Lösungen:

A. $c>0{,}787996\cdots\cdot b$; $\Delta=$ pos.

Die kubische Hilfsgleichung in v (6) besitzt eine reelle und zwei imaginäre Wurzeln; folglich werden bei der biquadratischen Gleichung (5) in y 2 Wurzeln reell und 2 Wurzeln imaginär. Wir erhalten zwei reelle, verschiedene Lösungen. Laut Konstruktion sind die Dreiecke spitzwinklig.

B. $c=0{,}787996\cdots\cdot b$; $\Delta=0$.

Die kubische Hilfsgleichung hat 3 reelle Wurzeln, wovon 2 gleiche. In diesem Fall besitzt die biquadratische Gleichung 4 reelle Wurzeln, wovon auch 2 gleiche. Wir bekommen 4 reelle Lösungen, wovon 2 zusammenfallen. Die ungleichen Dreiecke sind laut Konstruktion spitzwinklig, die zwei gleichen stumpfwinklig.

C. $c < 0{,}787996\cdots\, b$

Δ = neg., wenn wir $c = 0$ ausschliessen.

Die Wurzeln der Gleichung (6) sind alle reell und positiv. Die Gleichung (5) hat folglich ebenfalls lauter reelle Wurzeln und damit unsere Aufgabe 4 wirkliche Lösungen.

Spezialfälle:

1. $c = \frac{b}{2}\sqrt{2}.$

Die Gleichung (6) bekommt die Form

$v^3 - \frac{9}{12} b^4 v = 0$; die Wurzeln sind

$$v_1 = 0.$$

$$v_2 = \frac{b^2}{2}\sqrt{3}.$$

$$v_3 = -\frac{b^2}{2}\sqrt{3}.$$

Die Gleichung (β) lautet in diesem Fall

$$\left(z^2 + bz - \frac{b^2}{2}\right)(z^2 - bz + 0) = 0.$$

Subtrahieren wir von den Wurzeln dieser Gleichung $\frac{b}{2}$, so erhalten wir schliesslich folgende Werte für y:

1. $y_1 = \frac{b}{2}$, bedingt ein rechtwinkliges Dreieck.
2. $y_2 = -\frac{b}{2}$, » » » »
3. $y_3 = b\left(\frac{1}{2}\sqrt{3} - 1\right)$, bedingt ein stumpfwinkliges Dreieck.
4. $y_4 = -b\left(\frac{1}{2}\sqrt{3} + 1\right)$, » » spitzwinkliges »

2. $c = 0$; $\Delta = 0$.

Gleichung (6) nimmt die Form an

$$v^3 - \frac{4b^4}{3} v - \frac{16b^6}{27} = 0.$$

Die Wurzeln sind:

$$v_1 = \frac{4}{3} b^2; \quad v_2 = v_3 = -\frac{2}{3} b^2.$$

Gleichung (β) bekommt die Form

$$\left(z^2 + b\sqrt{2} \cdot z + \frac{b^2}{2}\right)\left(z^2 + b\sqrt{2} \cdot z + \frac{b^2}{2}\right) = 0.$$

Subtrahieren wir wieder von den Wurzeln dieser Gleichung $\frac{b}{2}$, so finden wir für y folgende Werte:

1. $y_1 = y_2 = \frac{b}{2}(\sqrt{2} - 1)$, bedingt ein doppeltgelegtes stumpfwinkliges Dreieck.
2. $y_3 = y_4 = -\frac{b}{2}(\sqrt{2} + 1)$, bedingt 2 zusammenfallende spitzwinklige Dreiecke.

Die Dreiecke, die wir für $c = 0$ erhalten haben, besitzen folgende zum teil schon aus der Konstruktion hervorgehende Eigenschaften:

1. In jedem der beiden Dreiecke ist die Schenkelhöhe h_s gleich dem äussern Schenkelabschnitt n.

2. Die Schenkelhöhe h_s des einen Dreiecks ist gleich dem innern Schenkelabschnitt m des andern und umgekehrt.

3. Die Basiswinkel dieser Dreiecke messen $22\,1/2^0$, resp. $67\,1/2^0$.

Satz (1) folgt aus der Konstruktion. Satz (2) soll analytisch bewiesen werden. Zu dem Zweck berechnen wir im spitzwinkligen Dreieck O A B die drei Grössen s, h_s und m. Wir finden:

1. $s = \frac{b}{2}\sqrt{4 + 2\sqrt{2}}$;
2. $h_s = \frac{b}{2}\sqrt{2 + \sqrt{2}}$;
3. $m = \frac{b}{2}\sqrt{2 - \sqrt{2}}$.

Es muss nun im spitzwinkligen Dreieck das von den 3 Stücken b, h_s und m begrenzte Dreieck O A D_1 gleich dem

stumpfwinkligen $\triangle$ OAB sein, vermehrt um das von den 3 Stücken s, h_s und n gebildete rechtwinklige $\triangle$ ABD; also $\triangle OAD_1 = \triangle OAB + \triangle ABD$, sofern Satz (2) bestehen soll. Wir schreiben für die Flächen dieser Dreiecke die halben Produkte aus Grundlinie und Höhe, multiplizieren das 2 im Nenner weg und erhalten:

$$\frac{b}{2}\sqrt{2+\sqrt{2}} \cdot \frac{b}{2}\sqrt{2-\sqrt{2}} = \frac{b^2}{2}(\sqrt{2}-1) + \left(\frac{b}{2}\sqrt{2-\sqrt{2}}\right)^2$$

$$\frac{b^2}{4}\sqrt{2} = \frac{b^2}{4}\sqrt{2};$$ die Gleichung ist identisch richtig, somit unsere Behauptung bewiesen.

Die Wahrheit von Satz (3) kann trigonometrisch leicht dargethan werden.

Für die Flächeninhalte dieser zwei Dreiecke erhalten wir folgende Ausdrücke:

$$\left.\begin{aligned} F_{OAB} &= \frac{b^2}{4}(\sqrt{2}-1) \\ F_{OAB_1} &= \frac{b^2}{4}(\sqrt{2}+1) \end{aligned}\right\}. \qquad (8)$$

3. $c = \frac{b}{2}$; siehe Figur 6, Tafel II.

Eine Lösung wird unendlich klein; denn die Gleichung (5) wird für $c = \frac{b}{2}$ und $y = 0$ erfüllt.

§ 10. *Zweites Lösungsverfahren. Bestimmung der Fusspunkte D der Schenkelhöhe.* Voraussetzungen wie in § 8.

a) Konstruktion der Hilfskurve.

Es sei (siehe Fig. 7, Taf. II) $OA = b$ die gegebene Basis. Ziehe den Grundkreis und die Mittelsenkrechte MM_1. Schlage ferner um A einen Hilfskreis, dessen Radius $r = AH = c$ ist. Ziehe nun durch O einen Strahl, welcher den Grundkreis in Q und die Mittelsenkrechte in R schneidet. Fälle von A aus ein Lot auf den Strahl, welches durch Q gehen muss und den Hilfskreis in H und H_1 schneidet. Jetzt trägt man auf dem Strahl OQ von R aus die Strecke QH nach der gleichen, die Strecke QH_1 nach der entgegengesetzten Seite von O ab, macht also

1. $RP_1 = QH$, so dass die Relation gilt
   $RP_1 + AQ = QH + AQ = AH = c$.
2. $RP_2 = QH_1$, so dass die Bedingung erfüllt wird
   $RP_2 - AQ = QH_1 - AQ = AH_1 = c$.

Der geometrische Ort aller Punkte P bei sich drehendem Strahl ist die Kurve. Die verschiedenen Punkte dieser Kurve genügen einer der Relationen $h_s \pm n = c$.

Fällt ein Kurvenpunkt P in den Grundkreis, so wird

$$RP = BD = n \text{ und}$$

$QA = DA = h_s$; wir haben eine Lösung der Aufgabe. Die Schnittpunkte der Kurve mit dem Grundkreis liefern die Fusspunkte D der Schenkelhöhe der gesuchten Dreiecke.

b) Ableitung der Kurvengleichung.

Es seien in Fig. 7, Taf. II x und y die rechtwinkligen Koordinaten des Kurvenpunktes P_2. Es besteht nun die Proportion:

$$OP_2 : OK = RP_2 : CK;$$

die bezüglichen Werte eingesetzt,

$$\sqrt{x^2+y^2} : x = RP_2 : \frac{2x-b}{2}; \qquad (\alpha)$$

$$RP_2 = c + AQ = c + b\sin\varphi, \text{ sub. in } (\alpha);$$

wir erhalten

$$\sqrt{x^2+y^2} : 2x = (c + b\sin\varphi) : (2x-b);$$

$$(x^2+y^2) : 2x = (c\sqrt{x^2+y^2} + by) : (2x-b);$$

$$[(x^2+y^2)(b-2x) + 2bxy]^2 - 4c^2x^2(x^2+y^2) = 0. \qquad (9)$$

Polargleichung:

$$r = b\sin\varphi + \frac{b}{2\cos\varphi} \pm c. \qquad (10)$$

c) Eigenschaften der Kurve.

Die Kurve ist von der 6. Ordnung. Sie besteht aus zwei unendlichen Ästen, von denen der eine eine Schleife mit Doppelpunkt in O besitzt. Der Nullpunkt ist 4facher Punkt; denn die Gleichung beginnt mit Gliedern 4. Grades.

Als *Gleichung der Tangenten im Nullpunkt* erhalten wir:

$$\frac{y^4}{x^4} + \frac{4y^3}{x^3} + \frac{6b^2-4c^2}{b^2} \cdot \frac{y^2}{x^2} + \frac{4y}{x} + \frac{b^2-4c^2}{b^2} = 0. \qquad (11)$$

Wir können diese Gleichung nur für Spezialfälle auflösen.

1. $c = 0$.

Gleichung (11) bekommt die Form

$$\frac{y^4}{x^4} + \frac{4y^3}{x^3} + \frac{6y^2}{x^2} + \frac{4y}{x} + 1 = 0.$$

$$\left(\frac{y}{x} + 1\right)^4 = 0.$$

$y = -x$ ist 4fach gelegte Tangente im Nullpunkt.

Für $c = 0$ lautet nun die Kurvengleichung:

$$[(x^2+y^2)(b-2x) + 2bxy]^2 = 0. \qquad (12)$$

Die Kurve zerfällt somit in zwei zusammenfallende Kurven 3. Ordnung. Die Gleichung eines Astes lautet

$$(b-2x)(x^2+y^2) + 2bxy = 0. \qquad (12a)$$

Die Gerade $y = -x$ ist für jede der beiden Kurven 3. Ordnung Rückkehrtangente; denn setzen wir in Gleichung (12a) für y den Wert $-x$ ein, so erhalten wir:

$x^3 = 0$; der Nullpunkt ist also Spitze.

2. $c = \frac{b}{2}$.

Gleichung (11) nimmt die Form an

$$\frac{y^4}{x^4} + \frac{4y^3}{x^3} + \frac{5y^2}{x^2} + \frac{4y}{x} = 0. \qquad (\alpha)$$

$$\frac{y}{x} = 0;$$

die x-Axe ist Tangente.

Dividieren wir in (α) den Faktor $\frac{y}{x}$ weg, so bleibt

$$\frac{y^3}{x^3} + \frac{4y^2}{x^2} + \frac{5y}{x} + 4 = 0. \qquad (\beta)$$

Setze $\frac{y}{x} = w - \frac{4}{3}$.

Die transformierte Gleichung lautet:

$$w^3 - \frac{w}{3} + \frac{56}{27} = 0. \qquad (\gamma)$$

Die Diskriminante dieser Gleichung wird Δ = pos.; somit besitzt Gleichung (β) eine reelle und zwei imaginäre Wurzeln und Gleichung (α) im ganzen 2 reelle und 2 imaginäre Werte

für $\frac{y}{x}$. Für $c = \frac{b}{2}$ sind also 2 Nullpunktstangenten der Kurve reell und 2 imaginär.

3. $c = b$.

Gleichung (11) erhält die Form

$$\frac{y^4}{x^4} + \frac{4y^3}{x^3} + \frac{2y^2}{x^2} + \frac{4y}{x} - 3 = 0. \qquad (\delta)$$

Die kubische Hilfsgleichung, die wir ableiten können, hat eine reelle und zwei imaginäre Wurzeln; folglich besitzt Gleichung (δ) 2 reelle und 2 imaginäre Wurzeln. Die Nullpunktstangenten sind wieder zur Hälfte reell und zur Hälfte imaginär.

Überhaupt hat die Kurve, wie schon die Konstruktion ergiebt, im Nullpunkt stets 2 reelle und 2 imaginäre Tangenten mit Ausnahme des Falles, da $c = 0$ ist.

Um die Schnittpunkte mit der y-Axe zu erhalten, setzen wir in der Kurvengleichung (9) $x = 0$ und erhalten

$$b^2 y^4 = 0;$$

somit schneidet die y-Axe die Kurve 4mal im Nullpunkt und, da die Koeffizienten von y^6 und $y^5 = 0$ sind, noch 2mal im Unendlichen.

Setzen wir $y = 0$, so bekommen wir die Abschnitte auf der x-Axe. Wir erhalten die Gleichung:

$$[x^2(b-2x)]^2 - 4c^2x^4 = 0.$$

1. $x^4 = 0$; $x = 0$ 4mal;
2. $(b-2x)^2 = c^2$; $x = \frac{b}{2} \pm c$.

Die x-Axe schneidet die Kurve 6mal im Endlichen, worunter 4mal im Nullpunkt.

Zur Bestimmung der Asymptotenrichtungen machen wir die Kurvengleichung mit z homogen, setzen dann $z = 0$ und erhalten

$$4x^2(x^2+y^2)^2 = 0;$$

1. $x = 0$ 2mal;
2. $y = \pm ix$ 2mal.

Die imaginären Kreispunkte der Ebene sind also Doppelpunkte der Kurve. Ferner haben wir in

$$x = \frac{b}{2} \qquad (13)$$

2 zusammenfallende reelle Asymptoten. Um dies zu zeigen,

machen wir die Mittelsenkrechte $x = \frac{b}{2}$ zur y-Axe vermittelst der Transformationsformeln:

$$x = x' + \frac{b}{2},$$
$$y = y'.$$

Die Gleichung der Kurve wird:

$$\left[-2x'\left(x'^2 + bx' + \frac{b^2}{4} + y'^2\right) + 2by'\left(x' + \frac{b}{2}\right)\right]^2 -$$
$$4c^2\left(x'^2 + bx' + \frac{b^2}{4}\right)\left(x'^2 + bx' + \frac{b^2}{4} + y'^2\right) = 0. \quad (14)$$

Wir projizieren die unendlich fernen Punkte in der Richtung der y'-Axe auf die x'-Axe und setzen

$$y' = \frac{1}{y''}$$
$$\text{und} \quad x' = \frac{x''}{y''}.$$

Wir erhalten, wenn wir noch die Gleichung mit y''^6 multiplizieren,

$$\left[-2x''\left(x''^2 + bx''y'' + \frac{b^2y''^2}{4} + 1\right) + 2by''\left(x'' + \frac{by''}{2}\right)\right]^2 -$$
$$4c^2y''^2\left(x''^2 + bx''y'' + \frac{b^2y''^2}{4}\right)\left(x''^2 + bx''y'' + \frac{b^2y''^2}{4} + 1\right) = 0. \quad (15)$$

Die Schnittpunkte mit der y''-Axe: Setze $x'' = 0$, erhalte

$$b^4y''^4 - b^2c^2y''^4\left(\frac{b^2}{4}y''^2 + 1\right) = 0,$$

woraus

1. $y''^4 = 0$; $y'' = 0$ 4mal.
2. $y'' = \pm\frac{2}{bc}\sqrt{b^2 - c^2}$. (ε)

Der Nullpunkt der projizierten Kurve ist Doppelpunkt, dessen Tangenten in $x'' = 0$ zusammenfallen, und da für $x'' = 0$ $y''^4 = 0$ wird, so ist derselbe und damit auch der unendlich ferne Punkt der Asymptote $x = \frac{b}{2}$ ein *Selbstberührungspunkt*. Die Kurve hat also im Unendlichen einen *Selbstberührungspunkt*, und die Mittelsenkrechte $x = \frac{b}{2}$ ist *Selbstberührungsasymptote*.

Aus (ε) folgt ferner, dass die Gerade $x = \frac{b}{2}$ die Kurve im Endlichen im allgemeinen in 2 Punkten schneidet, deren Ordinaten

$$y = \pm \frac{bc}{2} \sqrt{\frac{1}{b^2 - c^2}} \text{ sind.}$$

Die Schnittpunkte sind reell, wenn $c < b$,
imaginär, wenn $c > b$
und liegen im Unendlichen, wenn $c = b$.

Im letztern Fall ist der unendlich ferne Punkt der Kurve ein Selbstberührungspunkt, in welchem die Mittelsenkrechte als Asymptote die Kurve in 6 zusammenfallenden Punkten berührt, also Inflexionsknoten zugleich.

Unsere Kurve ist also rational; denn sie besitzt
einen 4fachen Punkt im Nullpunkt = 6 Doppelpunkte,
einen Selbstberührungspunkt = 2 »
2 Doppelpunkte in den imaginären
Kreispunkten = 2 »

also das Maximum von 10 Doppelpunkten.

Die Kurve hat, wie sich aus der Konstruktion ergiebt, *Wendepunkte* und zwar, wenn

1. $c \geqq b$ 2 WP im rechten Ast;
2. $b > c > 0$ 4 WP, nämlich 3 im rechten Ast und einen im obern linken Ast;
3. $c = 0$ 1 WP im aufsteigenden Ast der doppelt gelegten Kurve 3. Ordnung.

Für ein unendlich grosses c besteht die Kurve aus der doppelt gelegten y-Axe und der unendlich fernen Geraden (linker Ast) und aus der unendlich fernen Geraden samt dem Nullpunkt als isoliertem Punkt (rechter Ast), zusammen also aus der doppelt gelegten y-Axe, der doppelt gelegten unendlich fernen Geraden und dem Nullpunkt als isoliertem Punkt.

Negative c erzeugen die gleichen Kurven wie positive c, weil c quadratisch vorkommt.

d) Die Lösungen der Aufgabe.

Es handelt sich um die Schnittpunkte D der Kurve mit dem Grundkreis. Die Koordinaten dieser Punkte D sind die Wurzeln des Gleichungssystems:

$$\left.\begin{array}{ll} 1. & [(b-2x)(x^2+y^2)+2bxy]^2-4c^2x^2(x^2+y^2)=0, \text{ Kurve.} \\ 2. & x^2-bx+y^2=0, \text{ Grundkreis.} \end{array}\right\} (\alpha)$$

Da die Kurve von 6. Ordnung ist, so wird sie vom Kreis in 12 Punkten geschnitten. Von diesen Schnittpunkten absorbiert der Nullpunkt 4, da er ein 4facher Punkt der Kurve ist. Weitere 4 werden absorbiert durch die imaginären Kreispunkte der Ebene, welche der Kurve je doppelt angehören. Es bleiben somit 4 Schnittpunkte übrig; folglich kann unsere Aufgabe im Maximum 4 reelle Lösungen aufweisen. Wir erhalten mithin das gleiche Ergebnis wie beim ersten Lösungsverfahren. Wir wollen die Übereinstimmung in zwei Spezialfällen zeigen.

1. $c=0$, Taf. II, Fig. 7.

Das Gleichungssystem (α) heisst nun:

$$\left.\begin{array}{ll} 1. & (b-2x)(x^2+y^2)+2bxy=0 \\ 2. & x^2-bx+y^2=0 \end{array}\right\} (\beta)$$

Wir lösen (2) nach y auf, setzen den Wert in (1) ein und erhalten zur Bestimmung der Abscissen von D′ folgende Gleichung in x: $4b^2x^2(bx-x^2)=(b-2x)^2b^2x^2$, woraus

$$x=\frac{b}{4}(2\pm\sqrt{2}).$$

Für y erhalten wir den Ausdruck:

$$y=\pm\frac{b}{4}\sqrt{2}.$$

Da die Koordinaten doppelwertig auftreten, so müssen wir 2 Schnittpunkte haben. Den positiven Zeichen in den Wurzeln entspricht der eine, den negativen der andere. Die beiden Schnittpunkte sind somit

$$D'\left[\frac{b}{4}(2+\sqrt{2}),\ \frac{b}{4}\sqrt{2}\right] \text{ und } D_1'\left[\frac{b}{4}(2-\sqrt{2}),\ -\frac{b}{4}\sqrt{2}\right].$$

Jeder der beiden Schnittpunkte ist indes noch doppelt zu zählen, weil die Kurve 3. Ordnung doppelt gelegt ist.

Die Basishöhen der beiden Dreiecke werden aus der Proportion bestimmt:

$$\frac{b}{4}(2\pm\sqrt{2}):\frac{b}{2}=\pm\frac{b}{4}\sqrt{2}:h_b;$$

$$h_{b1}=\frac{b}{2}(\sqrt{2}-1),\quad \triangle\ OAB^1;$$

$$h_{b2}=-\frac{b}{2}(\sqrt{2}+1),\quad \triangle\ OAB_1^1.$$

Diese Werte stimmen mit denjenigen auf pag. 114 vollständig überein.

2. $c = \frac{b}{2}\sqrt{2}$. Taf. II, Fig. 7.

Die Gleichung in x, deren Wurzeln die Abscissen der Schnittpunkte D sind, bekommt folgende Form

$$64x^4 - 128bx^3 + 84b^2x^2 - 20b^3x + b^4 = 0.$$

Die Wurzeln dieser Gleichung sind:

1. $x_1 = 0 + \frac{b}{2}$,
2. $x_2 = 0 + \frac{b}{2}$,
3. $x_3 = \frac{b}{4}\sqrt{3} + \frac{b}{2}$,
4. $x_4 = -\frac{b}{4}\sqrt{3} + \frac{b}{2}$;

dann wird

1. $y_1 = \frac{b}{2}$,
2. $y_2 = -\frac{b}{2}$,
3. $y_3 = -\frac{b}{4}$,
4. $y_4 = -\frac{b}{4}$.

Dies sind die Koordinaten der Schnittpunkte D.

Als Basishöhe für die 4 Lösungen erhalten wir:

1. $h_b = \frac{b}{2}$ für $\triangle OAB_1$;
2. $h_b = -\frac{b}{2}$ » $\triangle OAB_3$;
3. $h_b = b\left(\frac{1}{2}\sqrt{3} - 1\right)$ für $\triangle OAB_2$;
4. $h_b = -b\left(\frac{1}{2}\sqrt{3} + 1\right)$ » $\triangle OAB_4$.

Diese Werte stimmen vollständig überein mit denjenigen auf Seite 113.

IV.

§ 11. *Vierte Aufgabe: Konstruktion eines gleichschenkligen Dreieckes, wenn die Basis und die Summe oder Differenz der durch die Schenkelhöhe erzeugten Schenkelabschnitte gegeben sind.*

Gegeben: 1. b;

2. $m \pm n = \pm c =$ konstant.

Bedingungen: 1. $m+n \gtreqless \frac{b}{2}\sqrt{2}$

2. $m-n \lesseqgtr +\frac{b}{2}\sqrt{2}$.

Bei einem rechtwinkligen Dreieck wird $m+n=\frac{b}{2}\sqrt{2}$, und dies ist das Minimum. Wird das Dreieck spitzwinklig, so wird $m+n=s$ grösser als $\frac{b}{2}\sqrt{2}$, und wird es stumpfwinklig, so wird m allein schon grösser. Die Differenz $m-n$ erreicht in $\frac{b}{2}\sqrt{2}$ das Maximum beim rechtwinkligen Dreieck. Wird das Dreieck stumpfwinklig, so nimmt die Differenz $m-n$ an Wert ab bis zum Grenzwert $\frac{b}{2}$. Wird das Dreieck spitzwinklig, so nimmt die Differenz $m-n$ ab bis zu 0 (gleichseitiges Dreieck); dann wird sie negativ, resp. $n-m$ positiv bis zum Wert ∞.

§ 12. *Erstes Lösungsverfahren. Bestimmung der Punkte B.*

a) Konstruktion der Hilfskurve (ohne Figur).

Es sei $OA=b$ die gegebene Basis. Wir ziehen den Grundkreis und um O einen Hilfskreis mit der Konstanten c als Radius. Nun legen wir durch O einen Strahl, der den Grundkreis in Q und den Hilfskreis in H und H_1 schneidet. Die Strecken QH und QH_1 tragen wir von Q aus auf dem Strahl je nach der entgegengesetzten Seite hin ab und erhalten die 2 Punkte P_1 und P_2; für diese gilt:

$$\left.\begin{array}{ll} 1. & OQ+QP_1=OQ+QH=OH=c; \\ 2. & QP_2-OQ=QH_1-OQ=OH_1=c. \end{array}\right\} \quad (\alpha)$$

Der geometrische Ort aller Punkte P bei sich drehendem Strahl ist die gesuchte Kurve. Wir ziehen die Mittelsenkrechte MM_1. Fällt nun ein Kurvenpunkt in diese Gerade, so wird

$$QP=BD=n \quad \text{und} \quad QO=DO=m;$$

wir haben eine Lösung. Die Schnittpunkte der Kurve mit der Mittelsenkrechten sind somit die gesuchten Punkte B.

b) Ableitung der Kurvengleichung.

Addieren wir und subtrahieren wir die Gleichungen bei (α), so erhalten wir

$$1.\quad QP_1 + QP_2 = 2c;$$

oder
$$P_1P_2 = 2c; \qquad (\beta)$$

$$2.\quad 2OQ + QP_1 - QP_2 = 0;$$

$$OQ = QP_2 - OQ - QP_1 = QP_2 - c;$$

$$2\,OQ = OP_2 - c. \qquad (\gamma)$$

Ziehen wir nun um A einen Kreis mit dem Radius $r = b$, so wird dieser Kreis vom Strahl OP_2 in V so geschnitten, dass

$$OV = 2OQ = OP_2 - c.$$

Der Punkt V hat also von P_2 den Abstand c; da aber nach (β) $P_1P_2 = 2c$ ist, so muss V auch von P_1 den Abstand c haben. Es haben somit die Kurvenpunkte jedes Strahls gleichen und konstanten Abstand von einem festen Grundkreis. Unsere Kurve ist die *Kreiskonchoide*. Die Gleichung derselben lautet:

$$(x^2 + y^2 - 2bx)^2 - c^2(x^2 + y^2) = 0. \qquad (1)$$

Die x-Axe ist Symmetrieaxe.

1. $c > 2b$; Nullpunkt ist isolierter Punkt;
2. $c = 2b$; » » Spitze, die positive x-Axe Rückkehrtangente;
3. $c < 2b$; » » Doppelpunkt.

Polargleichung:

$$r = 2b\cos\varphi \pm c. \qquad (2)$$

c) Die Lösungen der Aufgabe.

Wir bestimmen die Schnittpunkte B. Die Abscisse derselben ist $x = \frac{b}{2}$. Diesen Wert setzen wir in der Kurvengleichung (1) ein und erhalten

$$\left(y^2 - \frac{3b^2}{4}\right)^2 - c^2\left(y^2 + \frac{b^2}{4}\right) = 0,$$

eine Gleichung in y, deren Wurzeln die Ordinaten der Schnittpunkte B und zugleich die Basishöhen der gesuchten Dreiecke sind. Diese Gleichung nach y aufgelöst, ergiebt

$$y = \pm\frac{1}{2}\sqrt{3b^2 + 2c^2 \pm 2c\sqrt{4b^2 + c^2}}. \qquad (3)$$

Dieser Ausdruck liefert für y 4 reelle oder 2 reelle und 2 imaginäre Werte. Bei variablem c erhalten wir daher entweder 4 oder 2 reelle Lösungen, welche paarweise symmetrisch sind. Für den Grenzfall erhalten wir 4 reelle Wurzeln, wovon $2 = 0$ sind. Dieser Fall tritt ein, wenn

$$3b^2 + 2c^2 - 2c\sqrt{4b^2 + c^2} = 0, \text{ also}$$

$$c = \frac{3b}{2} \text{ ist.}$$

Die Inhaltsformel der Dreiecke lautet:

$$F = \frac{gh}{2} = \frac{b}{4}\sqrt{3b^2 + 2c^2 \pm 2c\sqrt{4b^2 + c^2}}. \qquad (4)$$

Gruppierung der Lösungen:

$$\text{A.} \quad c > \frac{3b}{2}.$$

Bei der innern Wurzel gilt nur das positive Zeichen. Wir erhalten daher nur 2 reelle Lösungen und zwar 2 spitzwinklige Dreiecke.

Für den Spezialfall $c = 2b$ wird die Basishöhe derselben

$$h_b = y = \pm\frac{b}{2}\sqrt{11 + 8\sqrt{2}}.$$

$$\text{B.} \quad c = \frac{3b}{2}.$$

Die Wurzeln von (3) sind:

$$y_1 = \frac{b}{2}\sqrt{15}; \quad y_2 = -\frac{b}{2}\sqrt{15}; \quad y_3 = y_4 = 0.$$

Wir erhalten:

1. 2 symmetrische, spitzwinklige Dreiecke, bei denen $s = 2b$, $m = \frac{b}{4}$, $n = \frac{7}{4}b$ und die also die Bedingung erfüllen: $n - m = c$;
2. 2 unendlich kleine, auf die Basis reduzierte Dreiecke, für welche $m = 2n$ und $m + n = c$ ist.

$$\text{C.} \quad c < \frac{3b}{2}.$$

$$1. \quad c = b.$$

Nach Gleichung (3) wird

$$y = \pm\frac{b}{2}\sqrt{5 \pm 2\sqrt{5}};$$

für das positive Zeichen unter der Wurzel giebt es 2 symmetrische spitzwinklige Dreiecke, für welche $s = \frac{b}{2}(1 + \sqrt{5})$ und der Basiswinkel = 72° ist. Für das negative Zeichen sind die Dreiecke stumpfwinklig; $s = \frac{b}{2}(\sqrt{5} - 1)$; der Basiswinkel misst 36°.

$$2.\quad c = \frac{b}{2}\sqrt{2}.$$

Es wird $y = \pm\frac{b}{2}\sqrt{4 \pm 3}$.

Wir erhalten

1. 2 spitzwinklige Dreiecke mit den Grössen $s = 2c = b\sqrt{2}$, $m = \frac{b}{4}\sqrt{2}$ und $n = \frac{3b}{4}\sqrt{2}$;

2. 2 rechtwinklige Dreiecke.

$$3.\quad c = \frac{b}{2}.$$

Es wird $y = \pm\frac{b}{4}\sqrt{14 \pm 2\sqrt{17}}$;

4 spitzwinklige Dreiecke, paarweise symmetrisch.

Wird c noch kleiner als $\frac{b}{2}$, so nähern sich die ungleichen spitzwinkligen Dreiecke in der Grösse immer mehr und fallen endlich zusammen für

$$4.\quad c = 0;\quad y = \pm\frac{b}{2}\sqrt{3};$$

4 gleichseitige Dreiecke.

§ 13. *Zweites Lösungsverfahren. Bestimmung der Punkte D.*

a) Konstruktion der Hilfskurve. Taf. II. Fig. 8.

Es sei $OA = b$ die Basis des gleichschenkligen Dreieckes. Wir ziehen den Grundkreis, die Mittelsenkrechte MM_1 und endlich noch einen Hilfskreis um O mit dem Radius $r = c$. Durch O gehe nun ein Strahl, der den Grundkreis in Q, den Hilfskreis in H und H_1 und die Mittelsenkrechte in R schneidet. Auf diesem Strahl tragen wir nun von R aus die Strecken QH und QH_1 nach derselben Seite gegen O hin ab und erhalten die 2 Punkte P_1 und P_2. Der Punkt P_1 genügt der Relation $OQ - RP_1 = OQ - QH = OH = c$, und für P_2 gilt $RP_2 - OQ = QH_1 - OQ = OH_1 = c$. Der geometrische Ort aller Punkte P bei sich drehendem Strahl ist die Kurve. Ihre Schnittpunkte mit dem Grundkreis ergeben die gesuchten Fusspunkte D der Schenkelhöhe; denn fällt ein Kurvenpunkt P in den Grundkreis, so ist $QH = RP = BD = n$, und wir haben eine Lösung.

b) Ableitung der Kurvengleichung.

Es seien durch OA die Abscissenaxe und durch O die Ordinatenaxe gelegt. Sind x und y die rechtwinkligen Koordinaten eines Kurvenpunktes P_1, so kann man setzen, wenn $P_1 N \perp M M_1$ gezogen wird,

$$P_1 R = \sqrt{P_1 N^2 + N R^2}; \qquad (\alpha)$$

$$\left.\begin{aligned} P_1 R &= HQ = OQ - OH = b\cos\varphi - c, \\ P_1 N &= \frac{b}{2} - x, \\ N R &= RC - NC = \frac{by}{2x} - y. \end{aligned}\right\} \text{ sub. in } (\alpha);$$

Es giebt

$$b\cos\varphi - c = \sqrt{\frac{(b-2x)^2}{4} + \frac{y^2(b-2x)^2}{4x^2}};$$

$$\left[(x^2+y^2)\left(\frac{b}{2}-x\right) - bx^2\right]^2 - c^2x^2(x^2+y^2) = 0. \qquad (5)$$

Polargleichung:

$$r = \frac{b}{2\cos\varphi} - b\cos\varphi \mp c. \qquad (6)$$

c) Diskussion der Kurvengleichung.

Die Kurve ist von der 6. Ordnung. Ihre Gleichung (5) beginnt mit Gliedern 4. Grades; folglich ist der Nullpunkt 4facher Punkt. Die Gleichung der *Nullpunktstangenten* lautet

$$y = \pm\frac{x}{b}\sqrt{\underbrace{b^2+2c^2}_{A} \pm \underbrace{2c\sqrt{2b^2+c^2}}_{B}}. \qquad (7)$$

Es ist nun

$$A^2 - B^2 = b^4 - 4b^2c^2 = b^2(b^2-4c^2).$$

So lange $b \gtrless 2c$ ist, ist auch $A > B$, und wir erhalten 4 reelle Wurzeln für y, daher auch 4 reelle Tangenten. Ist $b < 2c$, so werden 2 Wurzeln und damit 2 Tangenten imaginär. Wir erhalten mithin 2 Hauptfälle für die Tangenten im Nullpunkt.

A. $c > \frac{b}{2}$.

2 Tangenten sind reell, 2 imaginär. Der 4fache Punkt im Nullpunkt ist daher Doppelpunkt und konjugierter Punkt zugleich; folglich muss die Kurve 2 Äste haben, was die Konstruktion

auch bestätigt. Der eine Kurvenast geht durch den Nullpunkt, der andere nicht.

$$\text{B.}\quad c \lessgtr \frac{b}{2}.$$

4 reelle Tangenten; beide Kurvenzweige gehen durch den Nullpunkt.

$$1.\quad c = \frac{b}{2},\ \text{siehe Fig. 8, Taf. II.}$$

Nach Gleichung (7) wird

$$y_{1,2} = \pm x\sqrt{3};\ y_3 = y_4 = 0.$$

Die Tangenten des 1. Astes bilden mit der x-Axe Winkel von $\pm 60^0$; für den 2. Ast ist die x-Axe Rückkehrtangente und der Nullpunkt Spitze.

$$2.\quad \frac{b}{2} > c > 0.$$

4 reelle, unter sich verschiedene Tangenten; der Nullpunkt ist Doppelpunkt für beide Kurven-Äste.

$$3.\quad c = 0.$$

Wir erhalten $y = \pm x$ je 2mal.

Die beiden Äste fallen zusammen. Der Richtungswinkel der Tangenten $= \pm 45^0$. Die Kurve zerfällt in 2 zusammenfallende Kurven 3. Ordnung, deren Gleichung die Form besitzt:

$$(x^2 + y^2)\left(\frac{b}{2} - x\right) - b^2x^2 = 0$$

$$\text{oder}\qquad (x^2 + y^2)\,x - \frac{b}{2}(y^2 - x^2) = 0. \tag{8}$$

Diese Kurve ist die *Strophoide*. Die Achse ihrer Schleife ist gleich der halben Basis b.

Die Schnittpunkte mit der x-Axe: Setze $y = 0$, erhalte $[(b - 2x)x^2 - 2bx^2]^2 - 4c^2x^4 = 0$;

$$1.\quad x^4 = 0;\qquad 2.\quad x = -\frac{b}{2} \pm c.$$

Die Schnittpunkte mit der y-Axe: Setze $x = 0$, erhalte $y^4 = 0$.

4 Schnittpunkte fallen in den Nullpunkt, die andern 2 ins Unendliche; denn die Koeffizienten von y^5 und y^6 sind Null.

Da y nur im 2. und 4. Grad vorkommt, so erhalten wir,

wenn wir die Gleichung nach y auflösen, einen Ausdruck von der Form

$$y = \pm \sqrt{A \pm \sqrt{B}},$$ d. h. jedem endlichen Wert von x entsprechen 4 Werte von y, die paarweise absolut gleich sind. Die Kurve liegt also symmetrisch zur x-Axe.

Um die Schnittpunkte der Kurve mit der unendlich fernen Geraden zu gewinnen, machen wir die Gleichung mit z homogen, setzen dann $z = 0$ und erhalten:

$$U_n = U_6 = 4x^2(x^4 + 2x^2y^2 + y^4) = 0;$$ daraus folgt

$$1.\quad x^2 = 0,$$

2 reelle, mit der y-Axe zusammenfallende Asymptotenrichtungen.

$$2.\quad y = \pm ix$$ je 2mal.

Die imaginären Kreispunkte der Ebene sind Doppelpunkte der Kurve.

$$\text{Die Gerade } x = \frac{b}{2} \tag{9}$$

ist *Selbstberührungsasymptote;* denn für $x = \frac{b}{2}$ werden 4 Werte von y unendlich gross. Transformieren wir die Gleichung vermittelst der Formeln

$$x = x' + \frac{b}{2} \text{ und } y = y',$$

projizieren nachher die unendlich ferne Gerade in der Richtung der y-Axe auf die x-Axe mit Hilfe der Formeln

$$x' = \frac{x''}{y''} \text{ und } y' = \frac{1}{y''},$$

so erhalten wir

$$\left[-2x''\left(x''^2 + bx''y'' + \frac{b^2y''^2}{4} + 1\right) - 2b\left(x''^2y'' + bx''y''^2 + \frac{by''^3}{4}\right)\right]^2 - 4c^2\left(x''^2y'' + bx''y''^2 + \frac{b^2y''^3}{4}\right)^2 - 4c^2\left(x''^2y'' + bx''y''^2 + \frac{b^2y''^3}{4}\right)y'' = 0. \tag{10}$$

Der Nullpunkt der transformierten Kurve ist Doppelpunkt. Die Nullpunktstangenten, deren Gleichung

$$x''^2 = 0 \text{ ist,}$$

fallen zusammen, und da endlich für $x'' = 0$

$y''^4 = 0$ wird,

so muss der Nullpunkt und damit auch der unendlich ferne Punkt der Kurve Selbstberührungspunkt und die Gerade $x = \frac{b}{2}$ Selbstberührungsasymptote sein. Im unendlich fernen Selbstberührungspunkt hangen die Kurvenäste zusammen.

Für $c = 0$ wird die Mittelsenkrechte doppelt gelegte Wendeasymptote.

Die Kurve ist *rational;* denn sie besitzt 10 Doppelpunkte, wovon 6 im Nullpunkt (4facher Punkt), 2 im Selbstberührungspunkt und 2 in den imaginären Kreispunkten der Ebene liegen.

Die Kurve hat im rechten Ast 4 *Wendepunkte,* so lange $c > \frac{b}{2}$ ist. Für $c \leqq \frac{b}{2}$ sinkt die Zahl derselben auf 2 herab. Für $c = 0$ speziell liegen die beiden vereinigt im Unendlichen. Dem rechten Kurvenast gehört jetzt nur noch einer an, da auch der linke Ast — wie der rechte zur Strophoide geworden — einen gewinnt.

Bei unendlich grossem c besteht die Kurve aus der doppelt gelegten y-Axe, der doppelt gelegten unendlich fernen Geraden und dem Nullpunkt als konjugiertem Punkt.

Negative c erzeugen dieselben Kurven wie positive, da c nur quadratisch vorkommt.

d) Die Lösungen der Aufgabe.

Wie schon erwähnt, handelt es sich um die Bestimmung der Schnittpunkte D. Die Koordinaten derselben sind die Wurzeln des Systems:

1. $[(b-2x)(x^2+y^2)-2bx^2]^2-4c^2x^2(x^2+y^2)=0$, Kurve;
2. $x^2-bx+y^2=0$, Grundkreis.

Wir lösen dieses System zunächst nach x auf und erhalten

$$x = \frac{2b^2+c^2 \pm c\sqrt{4b^2+c^2}}{8b} \tag{11}$$

als Ausdruck für die Abscisse des Punktes D.

Für die Ordinate finden wir

$$y = \pm\frac{\sqrt{2}}{8b}\sqrt{6b^4-c^4 \pm (2b^2-c^2)c\sqrt{4b^2+c^2}}. \tag{12}$$

x und y sind die Koordinaten von D, d. h. vom Fusspunkt der Schenkelhöhe. Es besteht nun die Proportion:

$$h_b : y = \frac{b}{2} : x.$$

Quadrieren wir die Glieder dieser Proportion, setzen hierauf für x und y die Werte von (11) und (12) ein, reduzieren, so bekommen wir, wenn wir zum Schluss die Quadratwurzel ausziehen:

$$h_b = \pm\frac{1}{2}\sqrt{3b^2 + 2c^2 \pm 2c\sqrt{4b^2 + c^2}}. \qquad (13)$$

Dieser Wert stimmt vollkommen mit dem überein, den wir nach dem ersten Verfahren gefunden haben (vergleiche Formel (3), pag. 142). Beide Verfahren führen somit zu den gleichen Resultaten. Es wird nicht mehr nötig sein, auf die Lösungen noch näher einzutreten. Wir erlauben uns noch folgende Bemerkungen:

Für jede Abscisse giebt es 2 symmetrische Ordinaten, daher auch 2 symmetrische Dreiecke. Für den Grenzfall $c = \frac{3b}{2}$ wird

1. $x_1 = b$, bedingt 2 unendlich kleine Dreiecke OAC.
2. $x_2 = \frac{b}{16}$, » 2 spitzwinklige Dreiecke.

Ist $c > \frac{3b}{2}$, so wird

1. $x_1 > b$, die entsprechenden Ordinaten werden imaginär, weil die Kurve den Kreis nicht mehr schneiden kann; also liefert dieser Wert von x keine reellen Lösungen mehr.
2. $x_2 < \frac{b}{16}$. Die entsprechenden Dreiecke werden umso spitzwinkliger, je kleiner x_2 ist.

Nimmt dagegen der Wert von c successive von $\frac{3b}{2}$ bis 0 ab, so nimmt x_1 ab im Werte von b bis $\frac{b}{4}$ und x_2 zu im Werte von $\frac{b}{16}$ bis $\frac{b}{4}$. Die dem x_1 entsprechenden Lösungen sind stumpfwinklig zunächst, werden für $c = \frac{b}{2}\sqrt{2}$ rechtwinklig und dann spitzwinklig. Die Dreiecke, die dem Wert von x_2 zuge-

hören, werden immer weniger spitzwinklig. Für $c = 0$ ist $x_1 = x_2$ und die Dreiecke fallen als gleichseitige zusammen.

V.

§ 14. *Fünfte Aufgabe: Ein gleichschenkliges Dreieck zu konstruieren, von welchem die Basis und die Summe oder Differenz der beiden Dreieckshöhen gegeben sind.*

Gegeben: 1. b;
2. $h_b \pm h_s = \pm c$ = konstant.

Bedingung: $\infty \gtreqless h_b + h_s \geqq 0$; $\infty \gtreqless h_b - h_s \lessgtr 0$.

Für ein unendlich kleines Dreieck verschwinden beide Höhen, also Summe und Differenz = 0; für ein unendlich grosses Dreieck ist $h_b = \infty$ und $h_s = b$, somit Summe und Differenz $= \infty$. Die Differenz $h_b - h_s$ wird ein zweitesmal zu Null, wenn der Basiswinkel 60° misst. Ist er kleiner als 60°, so ist $h_b - h_s$ = neg., ist er grösser als 60°, so ist $h_b - h_s$ = pos.

§ 15. *Erstes Lösungsverfahren. Bestimmung der Punkte B.*

a) Konstruktion der Kurve. Taf. II, Fig. 9.

$OA = b$ sei die Basis des gleichschenkligen Dreiecks. Wir ziehen den Grundkreis und die Mittelsenkrechte MM_1. Auf MM_1 tragen wir c von C aus nach E ab. Es gehe durch O ein Strahl, der den Grundkreis in Q schneidet. Von E aus schlagen wir nun mit dem Radius $r = AQ$ einen Kreisbogen, der den Strahl OQ in P_1 und P_2 schneidet. Der geometrische Ort des Punktes P ist die Hilfskurve. Dieselbe kann daher folgendermassen definiert werden:

Zieht man durch O Strahlen, so ist die Kurve der geometrische Ort eines Strahlenpunktes, der von einem festen Punkt E der Mittelsenkrechten denselben Abstand hat wie der Strahl selber vom festen Punkt A. Fällt ein Kurvenpunkt in die Mittelsenkrechte, so ist

einerseits $EC \pm PE = h$;
andererseits ist $EC \pm PE = c \pm h_s$; folglich
$h_b = c \pm h_s$, d. h. wir haben

eine Lösung vor uns. Die Schnittpunkte der Kurve mit der Mittelsenkrechten ergeben daher die gesuchten Punkte B.

b) Ableitung der Kurvengleichung.

Wir legen durch OA die x-Axe und durch O die y-Axe. x und y seien die rechtwinkligen Koordinaten eines Kurvenpunktes P_1. EN sei $\parallel$ AO gezogen; dann ist

$$EP_1 = \sqrt{\left(x - \frac{b}{2}\right)^2 + (y-c)^2}; \qquad (\alpha)$$

$EP_1 = AQ = b\sin\varphi$, in (α) eingesetzt, so giebt es

$$b\sin\varphi = \sqrt{\left(x - \frac{b}{2}\right)^2 + (y-c)^2}, \text{ umgeformt}$$

$$(x^2+y^2)\left[\left(x - \frac{b}{2}\right)^2 + (y-c)^2\right] - b^2y^2 = 0. \qquad (1)$$

c) Diskussion der Kurvengleichung.

Die Kurve ist von 4. Ordnung und hat im Nullpunkt einen Doppelpunkt. Die Gleichung der *Tangenten im Nullpunkt* lautet:

$$(x^2+y^2)\left(\frac{b^2}{4} + c^2\right) - b^2y^2 = 0;$$

$$y = \pm x\sqrt{\frac{b^2+4c^2}{3b^2-4c^2}}. \qquad (2)$$

Spezialfälle:

1. $c = 0$;

   $y = \pm\frac{x}{3}\sqrt{3}$; die Nullpunktstangenten bilden mit der x-Axe Winkel von $\pm$ 30°.

2. $c = \frac{b}{2}$;

   $y = \pm x$.

Richtungswinkel der Tangenten $= \pm$ 45°. Die Tangente $y = -x$ ist Wendetangente.

3. $c = \frac{b}{2}\sqrt{2}$;

   $y = \pm x\sqrt{3}$, Richtungswinkel $= \pm$ 60°.

4. $c = \frac{b}{2}\sqrt{3}$;

   $x = 0$ 2mal.

Die y-Axe ist Rückkehrtangente und der Nullpunkt Spitze.

5. $c > \frac{b}{2}\sqrt{3}$.

Die Tangenten werden imaginär, und der Nullpunkt wird zum isolierten Punkt.

Schnittpunkte mit der y-Axe: Setze $x = 0$ und erhalte

$$1.\quad y_1 = y_2 = 0 \quad \text{und} \quad 2.\quad y_{3,4} = c \pm \frac{b}{2}\sqrt{3}.$$

Schnittpunkte mit der x-Axe: Setze $y = 0$ und finde

$$1.\quad x_1 = x_2 = 0 \quad \text{und} \quad 2.\quad x_{3,4} = \frac{b}{2} \pm ci.$$

So lange c von 0 verschieden ist, schneidet die Kurve die x-Axe nur im Doppelpunkt O. Ist $c = 0$, so werden auch die beiden andern Schnittpunkte reell und fallen in den Punkt C, welcher Doppelpunkt der Kurve wird.

Die imaginären Kreispunkte der Ebene sind Doppelpunkte der Kurve; denn es ist

$$U_n = (x^2 + y^2)^2.$$

Reelle Punkte hat die Kurve im Unendlichen nicht, daher auch keine Asymptoten.

Die Kurve ist *rational;* denn sie hat 3 Doppelpunkte. Für $c = 0$ besitzt sie 4 Doppelpunkte und zerfällt, wie wir noch sehen werden.

Für $c = 0$ nimmt Gleichung (1) die Form an:

$$(x^2 + y^2)\left[\left(x - \frac{b}{2}\right)^2 + y^2\right] - b^2y^2 = 0;$$

das Gleichungspolynom lässt sich in 2 Faktoren zerlegen; wir erhalten:

$$\left(x^2 + y^2 - \frac{bx}{2} + \frac{by}{2}\sqrt{3}\right)\left(x^2 + y^2 - \frac{bx}{2} - \frac{by}{2}\sqrt{3}\right) = 0; \qquad (3)$$

daraus folgt

$$\left.\begin{aligned} &1.\quad x^2 + y^2 - \frac{bx}{2} - \frac{by}{2}\sqrt{3} = 0 \\ &\text{oder}\quad \left(x - \frac{b}{4}\right)^2 + \left(y - \frac{b}{4}\sqrt{3}\right)^2 = \frac{b^2}{4}, \qquad (\beta) \\ \text{und}\quad &2.\quad \left(x - \frac{b}{4}\right)^2 + \left(y + \frac{b}{4}\sqrt{3}\right)^2 = \frac{b^2}{4}. \qquad (\gamma) \end{aligned}\right\} \qquad (4)$$

Die Kurve zerfällt in 2 Kreise (β) und (γ), deren Mittelpunktskoordinaten: $\left(\frac{b}{4}, \frac{b}{4}\sqrt{3}\right)$ und $\left(\frac{b}{4}, -\frac{b}{4}\sqrt{3}\right)$ sind.

Beide Kreise haben den Radius $r = \frac{b}{2}$. Beide Kreise schneiden sich in O und C.

Für ein unendlich grosses c besteht die Kurve aus der doppelt gelegten unendlich fernen Geraden und dem Nullpunkt als isoliertem Punkt.

Negative c erzeugen die gleichen Kurven wie positive c; nur liegen die Gebilde symmetrisch zueinander.

d) Die Lösungen.

Wir suchen die Spitzen B der gleichschenkligen Dreiecke. Alle haben die Abscisse $x = \frac{b}{2}$. Setzen wir diesen Wert in der Kurvengleichung (1) ein, so erhalten wir

$$\left(y^2 + \frac{b^2}{4}\right)(y^2 - 2cy + c^2) - b^2y^2 = 0. \tag{5}$$

Die Wurzeln dieser Gleichung in y sind die Ordinaten der Schnittpunkte B. Lösen wir (5) auf, so finden wir zunächst folgende kubische Hilfsgleichung:

$$v^3 - \frac{9b^4 - 24b^2c^2 + 16c^4}{48}v + \frac{27b^6 - 972b^4c^2 + 144b^2c^4 - 64c^6}{864} = 0.$$

Die Diskriminante letzterer Gleichung lautet

$$\Delta = \frac{b^4c^2(64c^6 - 144b^2c^4 + 540b^4c^2 - 27b^6)}{432}.$$

Es ist nun $\Delta = 0$, wenn

$$\left.\begin{aligned} &1.\quad c = 0, \\ &2.\quad c = \pm\frac{b}{2}\sqrt{3(1 + \sqrt[3]{4} - 2\sqrt[3]{2})}. \end{aligned}\right\} \tag{6}$$

Wir bekommen daher folgende Hauptfälle:

$$\text{A.}\quad c > \frac{b}{2}\sqrt{3(1 + \sqrt[3]{4} - 2\sqrt[3]{2})}.$$

Die Diskriminante der kubischen Hilfsgleichung ist positiv; die biquadratische Gleichung (5) besitzt folglich 2 reelle Wurzeln, und wir erhalten 2 reelle Lösungen.

$$1.\quad c > \frac{b}{2}(1 + \sqrt{2}).$$

Beide Dreiecke sind nach Konstruktion spitzwinklig. Das kleinere davon ist gleichseitig, wenn speziell $c = b\sqrt{3}$.

$$2. \quad c = \frac{b}{2}(1+\sqrt{2}).$$

Für diesen Wert von c wird Gleichung (5) erfüllt, wenn wir für y den Wert $\frac{b}{2}$ einsetzen. Folglich haben wir hier unter den beiden Dreiecken ein rechtwinkliges.

$$3. \quad c < \frac{b}{2}(1+\sqrt{2}).$$

Ein Dreieck wird stumpfwinklig; das andere bleibt spitzwinklig.

$$B. \quad c = \frac{b}{2}\sqrt{3(1+\sqrt[3]{4}-2\sqrt[3]{2})}; \quad \Delta = 0.$$

4 reelle Lösungen, wovon 2 zusammenfallen. Die Kurve berührt die Mittelsenkrechte MM_1. Ein Dreieck ist spitzwinklig, die 3 andern stumpfwinklig, worunter 2 zusammenfallende.

$$C. \quad c < \frac{b}{2}\sqrt{3(1+\sqrt[3]{4}-2\sqrt[3]{2}.}$$

Die Diskriminante ist negativ; daher erhalten wir 4 reelle Lösungen. So lange c von 0 verschieden ist, sind sämtliche Dreiecke ungleich, und zwar sind 2 derselben stumpfwinklig, eines spitzwinklig und das vierte stumpfwinklig, rechtwinklig oder spitzwinklig, je nachdem $c \gtreqless \frac{b}{2}(\sqrt{2}-1)$ ist. Taf. II, Fig. 9.

Für $c = 0$ werden die 2 stumpfwinkligen Dreiecke unendlich klein, d. h. sie reduzieren sich auf die Basis. Die 2 spitzwinkligen werden gleichseitig.

§ 16. *Zweites Lösungsverfahren. Bestimmung der Fusspunkte D der Schenkelhöhen.* Die Voraussetzungen sind dieselben wie in § 14.

a) Konstruktion der Kurve. Taf. III, Fig. 10.

Es sei $OA = b$ die Basis des Dreiecks. Wir ziehen den Grundkreis und die Mittelsenkrechte und machen auf der letztern $CE = c =$ konstant. Nun ziehen wir durch O einen Strahl, welcher den Grundkreis in Q und die Mittelsenkrechte in R schneidet. Wir verbinden A mit Q und tragen auf dieser Ver-

bindungslinie die Strecke RE von A aus nach beiden Seiten ab, so dass $AP_1 = AP_2 = RE$ ist.

Der geometrische Ort aller Punkte P ist die Kurve. Fällt ein Kurvenpunkt in den Grundkreis, so ist

1. $RE = AP = AQ = h_s$,
2. $RE = c \mp h_b$; folglich

$c \mp h_b = h_s$ oder $c = h_s \pm h_b$; wir haben also eine Lösung vor uns. Die Schnittpunkte der Kurve mit dem Grundkreis müssen daher die Fusspunkte D der Schenkelhöhen der gesuchten Dreiecke sein.

b) Ableitung der Kurvengleichung.

Wir legen das rechtwinklige Koordinatensystem in gewohnter Weise. Sind x und y die Koordinaten eines Kurvenpunktes P_1, so gilt

$$AP_1 = \sqrt{(b-x)^2 + y^2}. \qquad (\alpha)$$

Nun ist $AP_1 = c - CR$. (β)

Ferner ist $\operatorname{tg}\varphi = \frac{RC}{OC} = \operatorname{cotg}(90^0 - \varphi) = \frac{b-x}{y}$, somit

$$RC = \frac{(b-x)b}{2y}, \text{ eingesetzt in } (\beta) \text{ ergiebt}$$

$$AP_1 = \frac{2cy - (b-x)b}{2y}, \text{ eingesetzt in } (\alpha) \text{ führt}$$

zur Kurvengleichung:

$$4y^2[(b-x)^2 + y^2] - [2cy - (b-x)b]^2 = 0. \qquad (7)$$

c) Diskussion der Kurvengleichung.

Die Kurve ist von der 4. Ordnung. Verlegen wir den Koordinatenanfangspunkt nach A durch Parallelverschiebung der Axen, indem wir setzen

$$x = x' + b \quad \text{und} \quad y = y',$$

so erhalten wir nach der Transformation und nach Weglassung der Indizes folgende einfachere Kurvengleichung:

$$4y^2(x^2 + y^2) - (2cy + bx)^2 = 0. \qquad (8)$$

A ist Doppelpunkt der Kurve; denn die Gleichung beginnt mit Gliedern 2. Grades. Die Doppelpunktstangenten fallen zusammen und bilden, da die Glieder 3. Grades fehlen, eine *Selbstberührungstangente.* Der *Nullpunkt ist also Selbstberührungspunkt.*

Die Gleichung der Selbstberührungstangente lautet:

$$y = -\frac{b}{2c}x. \tag{9}$$

Spezialfälle:

1. $c = 0$; $x = 0$. Fig. 10.
2. $c = \frac{b}{2}$; $y = -x$.
3. $c = \infty$; $y = 0$.

Wächst also c von 0 bis ∞, so dreht sich die Selbstberührungstangente um 90° aus der Richtung der y′-Axe in die Richtung der x′-Axe.

Die x′-Axe schneidet die Kurve nur im Selbstberührungspunkt A; die andern 2 Schnittpunkte fallen ins Unendliche, da die Potenzen x^3 und x^4 nicht vorhanden sind.

Die Schnittpunkte der y′-Axe mit der Kurve liegen für endliche Werte von c alle im Endlichen; es ist

$$y_{1,2} = 0 \quad \text{und} \quad y_{3,4} = \pm c.$$

Die Gleichung nach x aufgelöst, ergiebt

$$x = \frac{2bcy \pm 2y^2\sqrt{b^2 + 4c^2 - 4y^2}}{4y^2 - b^2}. \tag{10}$$

Jedem Wert von y entsprechen 2 verschiedene Werte von x. Nur für $y = 0$ fallen die Wurzeln zusammen. In diesem einzigen Fall liegt die Kurve symmetrisch und zwar zu beiden Axen. Jede Parallele zur x-Axe schneidet die Kurve im Endlichen in 2 Punkten, den Fall ausgenommen, da der Nenner Null wird. Die 2 Parallelen

$$y = \pm\frac{b}{2} \tag{11}$$

müssen daher *Asymptoten* der Kurve sein. Der Maximalwert, den y annehmen kann, ist

$$y = \frac{1}{2}\sqrt{b^2 + 4c^2}.$$

Um die Schnittpunkte der Kurve mit der unendlich fernen Geraden zu gewinnen, setzen wir nach bekanntem Verfahren

$$U_n = 4y^2(x^2 + y^2) = 0; \text{ daraus folgt}$$

1. $y = 0$ 2mal und 2. $y = \pm ix$.

Wir haben somit 2 reelle, zur x-Axe parallele Asymptotenrichtungen und 2 imaginäre. Die Kurve schneidet also die imagi-

nären Kreispunkte der Ebene. Da nun $y=0$ auch ein Faktor von U_3 ist, so muss der unendlich ferne Punkt der x-Axe ein Doppelpunkt der Kurve sein. Um die Art desselben zu untersuchen, projizieren wir ihn in den Nullpunkt A und setzen zu diesem Zwecke in Gleichung (8):

$$x=\frac{1}{x'} \quad \text{und} \quad y=\frac{y'}{x'}.$$

Wir erhalten, wenn wir nach der Transformation noch mit x'^4 multipliziert haben:

$$4y'^2(1+y'^2)-(2cy'x'+bx')^2=0.$$

Der Nullpunkt ist Doppelpunkt. Die Gleichung der Tangenten in demselben lautet

$$y'=\pm\frac{b}{2}x'.$$

Die projizierte Kurve hat im Nullpunkt einen Knotenpunkt mit 2 verschiedenen Tangenten; folglich ist der unendlich ferne Punkt der x-Axe auch ein solcher Doppelpunkt. Die Tangenten in demselben sind

$$y'=yx'=\pm\frac{b}{2}x' \quad \text{oder}$$

$$y=\pm\frac{b}{2}.$$

Diese Tangenten sind Asymptoten der Kurve, wie dies schon die Gleichung (10) verraten hat.

Unsere Kurve gehört somit auch zu den *rationalen* Kurven; denn sie besitzt einen Selbstberührungspunkt und einen Doppelpunkt, was zusammen für 3 Doppelpunkte zählt.

Für $c=0$ besteht die Kurve, deren Gleichung nun die Form hat

$$4y^2(y^2+x^2)-b^2x^2=0, \text{ aus 2 kongruenten Ästen} \quad (12)$$

zwischen den Asymptoten $y=\pm\frac{b}{2}$, siehe Fig. 10, Taf. III.

Für ein unendlich grosses c besteht die Kurve aus der doppelt gelegten unendlich fernen Geraden und der doppelt gelegten x-Axe. Asymptoten und Selbstberührungstangente laufen parallel.

Nimmt c negative Werte an, so sind die entstehenden Kurven Spiegelbilder derjenigen mit positivem c in Bezug auf die x-Axe.

d) Die Lösungen.

Die Koordinaten der zunächst gesuchten Schnittpunkte D sind die Wurzeln des Systems

1. $4y^2[(b-x)^2+y^2]-[2cy-(b-x)b]^2=0$, Kurve.

und 2. $x^2-bx+y^2=0$, Grundkreis.

Die allgemeine Lösung dieser Aufgabe stösst auf bedeutende Schwierigkeiten. Wir können die Übereinstimmung mit dem ersten Verfahren nur in Spezialfällen nachweisen.

1. Für ein gleichseitiges Dreieck besitzt der Punkt D die Koordinaten $\left(\frac{b}{4}, \frac{b}{4}\sqrt{3}\right)$.

Setzen wir diese Werte für x und y in Gleichung (1) unseres Systems oben ein, so wird

$$c_1 = b\sqrt{3} \quad \text{und} \quad c_2 = 0.$$

Vergleiche damit die Fälle A_1 und C, pag. 136.

2. Bei einem rechtwinkligen Dreieck sind die Koordinaten von $D=\left(\frac{b}{2}, \frac{b}{2}\right)$. Setzt man diese Werte gleichen Orts wieder ein, so wird $c=\frac{b}{2}(1+\sqrt{2})$. Fig. 10.

Vergleiche damit A_2, pag. 136.

3. Für ein unendlich kleines Dreieck hat Punkt D die Koordinaten (b, 0). Die Einsetzung dieser Werte liefert $c=0$, vergleiche damit C, pag. 136; siehe Fig. 10.

VI.

§ 17. *Sechste Aufgabe: Konstruktion eines gleichschenkligen Dreieckes, wenn die Basis und die Summe oder Differenz aus Schenkel und Schenkelhöhe gegeben sind.*

Gegeben: 1. b.
2. $s \mp h_s = c =$ konstant.

Bedingungen: 1. $s + h_s \gtrless \frac{b}{2}$,
2. $s - h_s \gtrless 0$.

Bei einem unendlich kleinen, auf die Basis reduzierten Dreieck ist $s + h_s = \frac{b}{2} =$ Minimum; denn $s = \frac{b}{2}$ und $h_s = 0$.

Ist das gleichschenklige Dreieck rechtwinklig, so ist $s - h_s = 0$. In jedem andern Fall ist s als Hypotenuse grösser als h_s (Kathete).

§ 18. *Erstes Lösungsverfahren: Bestimmung der Dreiecksspitzen B.*

a) Konstruktion der Kurve. Taf. III, Fig. 11.

Es sei $OA = b$ die Basis des Dreiecks. Wir ziehen den Grundkreis und um A den Hilfskreis mit dem Radius $r = c$. Ferner ziehen wir einen Strahl durch O, der den Grundkreis in Q schneidet. Die Verbindungslinie AQ endlich schneide den Hilfskreis in H und H_1. Liegt nun Q innerhalb des Hilfskreises, dann trägt man die beiden Strecken QH und QH_1 von O aus auf dem zugehörigen Strahl nach entgegengesetzten Seiten ab und zwar die Strecke nach Q hin, welche den Punkt A nicht enthält. Man macht also

$$OP_1 = QH \quad \text{und} \quad OP_2 = QH_1.$$

Beziehungen: 1. $OP_1 + AQ = QH + AQ = AH = c$;

2. $OP_2 - AQ = QH_1 - AQ = AH_1 = c$.

Liegt der Punkt Q ausserhalb des Hilfskreises, so trägt man beide Strecken nach Q hin ab. In diesem Fall gelten dann die Relationen:

1. $AQ' - OP_1' = AQ' - Q'H' = AH' = c$;
2. $OP_2' - AQ' = Q'H_1' - AQ' = AH_1' = c$.

Der geometrische Ort aller Punkte P ist die Hilfskurve. Fällt ein Kurvenpunkt P in die Mittelsenkrechte, so wird $OP = OB = s$ und $AQ = AD = h$, und man kann, wenn diese Werte in den Relationen oben eingesetzt werden, eine Lösung konstatieren. Die Schnittpunkte der Kurve mit der Geraden $x = \frac{b}{2}$ ergeben somit die zunächst gesuchten Punkte B.

b) Ableitung der Kurvengleichung.

Es seien für das gewohnte Koordinatensystem x und y die Koordinaten eines Punktes P'_2; dann kann gesetzt werden:

$$OP_2' = \sqrt{x^2 + y^2}; \qquad (\alpha)$$

Nun ist $OP_2' = c + AQ' = c + b\sin\varphi$, eingesetzt in ($\alpha$), und man hat $c + b\sin\varphi = \sqrt{x^2 + y^2}$, umgeformt

$$(x^2 + y^2 + by)^2 - c^2(x^2 + y^2) = 0. \qquad (1)$$

Polargleichung: $$r = -b\sin\varphi \pm c. \qquad (2)$$

Unsere Kurve ist die *Kreiskonchoide.* Die y-Axe ist Symmetrieaxe.

$c < b$, O ist Knotenpunkt; die Konchoide besitzt eine Schleife;

$c = b$, O ist Spitze und die negative y-Axe Rückkehrtangente;

$c > b$, O ist konjugierter Punkt.

Für $c = 0$ reduziert sich die Kurve auf den doppelt gelegten Kreis $x^2 + y^2 + by = 0$.

c) Die Lösungen.

Es handelt sich noch um die Bestimmung der Ordinaten der Schnittpunkte B. Wir führen zu diesem Zweck den Wert für $x = \frac{b}{2}$ in der Kurvengleichung (1) ein und erhalten:

$$\left(y^2 + by + \frac{b^2}{4}\right)^2 - c^2\left(y^2 + \frac{b^2}{4}\right) = 0.$$

Die Wurzeln dieser Gleichung sind die Ordinaten von B. Die Auflösung vorliegender Gleichung führt auf eine kubische Hilfsgleichung von der Form

$$v^3 + \frac{6b^2c^2 - c^4}{3}v + \frac{9b^2c^4 + 2c^6}{27} = 0.$$

Die Diskriminante dieser kubischen Gleichung wird

$$\Delta = \frac{bc^3\sqrt{3}}{18}\sqrt{32b^4 - 13b^2c^2 + 4c^4}.$$

Es ist nun $\Delta = 0$ nur in dem einen Fall, wenn

$$c = 0. \qquad (3)$$

Wir erhalten daher 2 Hauptfälle für die Lösungen:

A. $\Delta = 0$ für $c = 0$.

Wir bekommen für y 4 zusammenfallende Wurzeln, nämlich $y = -\frac{b}{2}$ als Ordinate der Spitze. Damit erhalten wir auch 4 zusammenfallende Dreiecke, welche rechtwinklig sind.

B. $\Delta = \text{pos.}$ für $c \neq 0$.

Die kubische Hilfsgleichung besitzt nur eine und infolge dessen die biquadratische Gleichung nur 2 reelle Wurzeln. Wir

erhalten somit für jeden Wert von c, 0 ausgenommen, nur 2 wirkliche Dreiecke.

Wie schon erwähnt, treten für $c=0$ 4 zusammenfallende rechtwinklige Dreiecke auf, welche auf der negativen Seite der y-Axe liegen. Fängt nun c zu wachsen an, so verschwinden erstens 2 Dreiecke. Die andern 2 verwandeln sich in ein spitzwinkliges und in ein stumpfwinkliges, und zwar wird für ein wachsendes c das spitzwinklige immer spitzwinkliger.

Für $c=\frac{b}{2}(2-\sqrt{3})$ wird es gleichseitig. Das stumpfwinklige wird auch stumpfwinkliger und erreicht für $c=\frac{b}{2}$ das Maximum. Der Winkel an der Spitze wird 180°. Das Dreieck reduziert sich auf die Basis. Wird $c>\frac{b}{2}$, so nimmt der Winkel an der Spitze stetig ab. Für $c=b\sqrt{2}$ wird das Dreieck rechtwinklig natürlich auf der positiven Seite der y-Axe. Für jeden Wert von $c>b\sqrt{2}$ ist dann auch das auf der positiven Seite der y-Axe liegende Dreieck spitzwinklig. Gleichseitig ist dieses spitzwinklige Dreieck für den Spezialwert von $c=\frac{b}{2}(2+\sqrt{3})$.

§ 19. *Zweites Lösungsverfahren: Bestimmung der Punkte D.*

Bedingungen wie in § 17.

a) Konstruktion der Kurve. Ohne Figur.

Es sei $OA=b$ die Basis des Dreiecks. Wir ziehen den Grundkreis, die Mittelsenkrechte MM_1 und endlich noch einen Hilfskreis um A mit dem Radius $r=c$. Ein durch A gezogener Strahl schneide nun den Grundkreis in Q, die Mittelsenkrechte in R und den Hilfskreis in H und H_1. Schliesslich wird noch durch O ein Strahl gezogen, der auch durch Q geht. Nun trägt man auf dem Strahl OQ von O aus die Strecken RH und RH_1 nach entgegengesetzten Seiten ab, macht also

$OP_1=RH$ und $OP_2=RH_1$, so dass also

1. $AR+OP_1=AR+RH=AH=c$ und ebenso
2. $OP_2-AR=RH_1-AR=AH_1=c$.

So darf es aber nur gemacht werden, wenn Q innerhalb des Hilfskreises liegt. Liegt Q ausserhalb des Hilfskreises, so

trägt man beide Strecken RH und RH_1 nach der gleichen Seite und zwar nach Q hin ab. Der geometrische Ort aller Punkte P ist die Hilfskurve.

Fällt ein Punkt derselben in den Grundkreis, so wird $OP = OQ = h_s$ und da $AR = s$ ist, so wird nach den oben stehenden Relationen

1. $s + h_s = c$ oder 2. $h_s - s = c$; somit ist der Punkt P zu einem Punkt D geworden; wir haben eine Lösung. Die Schnittpunkte der Kurve mit dem Grundkreis sind wieder die zunächst gesuchten Punkte D.

b) Ableitung der Kurvengleichung.

Wir erhalten nach analoger Methode wie früher

$$(x^2 + y^2)\left(y + \frac{b}{2}\right)^2 - c^2 y^2 = 0. \qquad (4)$$

Polargleichung: $$r = -\frac{b}{2\sin\varphi} \pm c. \qquad (4a)$$

Die Hilfskurve ist die *Konchoide des Nikomedes.* Die y-Axe ist die Symmetrieaxe derselben und die Gerade $y = -\frac{b}{2}$ die Leitlinie. c ist der auf einem Strahl durch O gemessene konstante Abstand zweier Kurvenpunkte von der Leitlinie.

Für $c > \frac{b}{2}$ besitzt die Konchoide eine Schleife.

für $c = \frac{b}{2}$ tritt sie mit Spitze auf in O;

» $c < \frac{b}{2}$ wird O zum konjugierten Punkt;

» $c = 0$ zerfällt die Kurve in die doppelte Leitlinie und den konjugierten Punkt O.

c) Die Lösungen.

Es handelt sich um die Bestimmung der Koordinaten der Schnittpunkte D. Diese Koordinaten sind die Wurzeln des Gleichungssystems:

1. $(x^2 + y^2)\left(y + \frac{b}{2}\right)^2 - c^2 y^2 = 0$, ... Kurve.
2. $x^2 - bx + y^2 = 0$, ... Grundkreis.

Wir führen den Wert von x aus (2) in (1) ein und erhalten

$$y^4 + 2by^3 + \frac{3b^4 - 2b^2c^2 + 2c^4}{2b^2} y^2 + \frac{b^3 - 2bc^2}{2} y + \frac{b^4 - 4b^2c^2}{16} = 0. \quad (5)$$

Die Wurzeln dieser Gleichung 4. Grades in y sind die Ordinaten der Schnittpunkte D. Die kubische Hilfsgleichung dazu erscheint in der Form

$$v^3 - \frac{c^4(4b^4 - 2b^2c^2 + c^4)}{3b^4} v - \frac{c^6(16b^6 + 15b^4c^2 - 6b^2c^4 + 2c^6)}{27b^6} = 0.$$

Als Diskriminante erhält man

$$J = \frac{c^{14}(32b^4 - 13b^2c^2 + 4c^4)}{27b^6}.$$

Es wird $J = 0$ nur für $c = 0$ wie beim ersten Verfahren. Auch hier giebt es die beiden gleichen Hauptfälle, nämlich

A. $J = 0$ für $c = 0$.

Wir erhalten wie beim ersten Verfahren 4 zusammenfallende rechtwinklige Dreiecke; denn in Gleichung (5) wird $y = -\frac{b}{2}$ 4mal.

B. $J =$ pos. für $c \neq 0$.

Für jeden von 0 verschiedenen Wert von c liefert Gleichung (5) 2 reelle Wurzeln und damit 2 reelle Dreiecke, also dasselbe Ergebnis wie beim ersten Verfahren. Setzt man in Gleichung (5) Spezialwerte ein

$y = 0$ für das unendlich kleine Dreieck,

$y = \pm\frac{b}{2}$ » » rechtwinklige »

$y = \pm\frac{b}{4}$ » » gleichseitige »

so erhält man die nämlichen Werte für c wie auf Seite 143.

VII.

§ 20. *Siebente Aufgabe: Konstruktion des gleichschenkligen Dreieckes, wenn die Basis und die Summe oder Differenz aus Schenkel und dem an die Basis angrenzenden Schenkelabschnitt gegeben sind.*

Gegeben: 1. b,

2. $s \pm m = \pm c$.

Bedingungen: 1. $s + m \geqq b\sqrt{2}$,

2. $m - s \leqq \pm \frac{b}{2}$.

Sie Summe $s + m$ ist ein Minimum beim rechtwinkligen Dreieck, und da ist $s = m = \frac{b}{2}\sqrt{2}$. $m - s$ erreicht den Maximalwert $\frac{b}{2}$ bei einem unendlich kleinen Dreieck und nimmt mit wachsendem h_b stetig ab. So lange das Dreieck noch stumpfwinklig ist, bleibt $m - s$ noch positiv. $m - s$ wird zu 0 beim rechtwinkligen und negativ beim spitzwinkligen Dreieck und kann hier dann jeden Wert von 0 bis $-\infty$ annehmen.

§ 21. *Erstes Lösungsverfahren: Bestimmung der Punkte B.*

a) Konstruktion der Hilfskurve. Taf. III, Fig. 12.

Es sei $OA = b$ die Basis des Dreiecks. Wir ziehen den Grundkreis, die Mittelsenkrechte MM_1 und einen Hilfskreis um O mit dem Radius $r = c$. Ein Strahl durch O schneide den Grundkreis in Q und den Hilfskreis in H und H_1. Nun tragen wir auf dem Strahl OQ von O aus die Strecken QH und QH_1 jede nach beiden Seiten ab, machen also

$$OP_1 = OP_3 = QH \text{ und}$$
$$OP_2 = OP_4 = QH_1.$$

Für die Punkte P_1 und P_3 gilt die Relation:

1. $OQ + OP_{1,3} = OQ + HQ = OH = c$, während die Punkte P_2 und P_4 die Bedingung erfüllen: 2. $OP_{2,4} - OQ = QH_1 - QO = OH_1 = c$. Dreht sich der Strahl OQ um O, so beschreiben die Punkte P_1 und P_4 eine Kurve und die Punkte P_3 und P_2 das Spiegelbild derselben in Bezug auf die y-Axe. Die Schnittpunkte beider Kurven mit der Mittelsenkrechten ergeben die zunächst gesuchten Punkte B; denn für einen solchen Kurvenpunkt P ist $OP = OB = s$ und $OQ = OD = m$, und die oben stehenden Relationen werden

$m + s = c$ oder $s - m = c$. Wir haben eine Lösung.

b) Ableitung der Kurvengleichung.

Es seien x und y die rechtwinkligen Koordinaten eines Kurvenpunktes P_2 im gewohnten Koordinatensystem; dann gilt:

$$OP_2 = \sqrt{x^2 + y^2}. \qquad (\alpha)$$

Nun ist $OP_2 = H_1Q = OQ + OH = b\cos\varphi + c$, sub. in (α)

$$b\cos\varphi + c = \sqrt{x^2 + y^2}, \text{ umgeformt}$$

$$(x^2 + y^2 - bx)^2 - c^2(x^2 + y^2) = 0. \qquad (1)$$

Die Punkte dieser Kurve genügen der Relation

$$s - m = \pm c.$$

Für die Relation: $s + m = c$ bekommt die Gleichung die etwas abweichende Form

$$(x^2 + y^2 + bx)^2 - c^2(x^2 + y^2) = 0. \qquad (2)$$

Die Kurven (1) und (2) sind symmetrisch zueinander gelegen in Bezug auf die y-Axe. Die Gleichung der Kurve, die alle Schnittpunkte B liefert, ist die unächte Kurve 8. Ordnung:

$$[(x^2 + y^2 + bx)^2 - c^2(x^2 + y^2)]\,[(x^2 + y^2 - bx)^2 - c^2(y^2 + x^2)] = 0. \qquad (3)$$

Unser symmetrisches Kurvenpaar besteht aus 2 *Kreiskonchoiden.* Für beide ist die x-Axe Symmetrieaxe. Bei positivem bx liegt die Kurve mehr auf der negativen Seite, bei negativem bx mehr auf der positiven Seite der x-Axe. Ist $c \gtreqless b$, so ist für beide Konchoiden der Punkt O isolierter Punkt, Rückkehrpunkt oder Doppelpunkt. Für $c = 0$ zerfällt jede Konchoide in 2 sich deckende Kreise. Die beiden Kreispaare berühren sich in O und haben in der y-Axe eine gemeinsame Tangente.

c) Die Lösungen.

Wir suchen zunächst die Schnittpunkte B der Kurve mit der Mittelsenkrechten. Dabei handelt es sich nur noch um die Bestimmung der Ordinaten dieser Punkte. Lösen wir das bekannte Gleichungssystem nach y auf, so finden wir

$$1.\ y = \pm\frac{1}{2}\sqrt{2c^2 - 3b^2 \pm 2c\sqrt{c^2 - 2b^2}}, \text{ wenn } bx = \text{pos.} \qquad (4)$$

und

$$2.\ y = \pm\frac{1}{2}\sqrt{b^2 + 2c^2 \pm 2c\sqrt{c^2 + 2b^2}}, \text{ wenn } bx = \text{neg.} \qquad (5)$$

Wir bekommen hier 2 gesonderte Lösungsgruppen.

Erste Gruppe für Formel (4).

$$A.\quad c > \frac{3b}{2}.$$

2 reelle Wurzeln für y für das positive Zeichen der innern Wurzel; 2 symmetrische spitzwinklige Dreiecke.

$$B.\quad \frac{3b}{2} \geqq c \geqq b\sqrt{2}.$$

4 reelle Wurzeln für y, welche paarweise absolut gleich sind; 4 wirkliche Dreiecke, welche paarweise symmetrisch sind.

$$1.\quad c = \frac{3b}{2}.$$

$$y_{1,2} = \pm\frac{b}{2}\sqrt{3} \quad \text{und} \quad y_{3,4} = 0.$$

2 gleichseitige Dreiecke, bedingt durch das positive Zeichen der innern Wurzel und 2 unendlich kleine, bedingt durch das negative Zeichen der innern Wurzel.

$$2.\quad \frac{3b}{2} > c > b\sqrt{2};$$ Fig. 12, Taf. III, Kurve II.

Das positive Zeichen der innern Wurzel erzeugt 2 spitzwinklige, das negative Zeichen 2 stumpfwinklige Dreiecke. Mit abnehmendem c werden die spitzwinkligen immer weniger spitzwinklig und die stumpfwinkligen weniger stumpfwinklig.

$$3.\quad c = b\sqrt{2};$$

$$y = \pm\frac{b}{2} \text{ je 2mal.}$$

Die Kurve berührt von der negativen Seite her die Mittelsenkrechte in den 2 Punkten $\left(\frac{b}{2}, \frac{b}{2}\right)$ und $\left(\frac{b}{2}, -\frac{b}{2}\right)$. 4 rechtwinklige Dreiecke, welche paarweise sich decken und paarweise symmetrisch sind.

$$C.\quad c < b\sqrt{2}.$$

Alle y-Werte sind imaginär, daher keine reellen Lösungen.

Alle Dreiecke der ersten Lösungsgruppe erfüllen die Bedingung $s + m = c$.

Für den Flächeninhalt derselben bekommen wir die allgemeine Formel:

$$F = \frac{b}{4}\sqrt{2c^2 - 3b^2 \pm 2c\sqrt{c^2 - 2b^2}}. \qquad (6)$$

Zweite Gruppe für Formel (5).

A. $c > \frac{b}{2}$. Fig. 12, Kurve I.

2 reelle Wurzeln für y und 2 imaginäre, letztere für das negative Zeichen der innern Wurzel. 2 symmetrische spitzwinklige Dreiecke, deren Basiswinkel $> 60°$.

B. $c \lessgtr \frac{b}{2}$.

4 reelle Wurzeln für y, daher 4 reelle Lösungen, welche paarweise symmetrisch sind.

1. $c = \frac{b}{2}$, Grenzfall.

Für das positive Zeichen der innern Wurzel wird $y = \pm \frac{b}{2}\sqrt{3}$, bedingt 2 gleichseitige Dreiecke. Für das negative Zeichen der innern Wurzel wird $y = \pm 0$, was 2 unendlich kleine Dreiecke zur Folge hat.

2. $\frac{b}{2} > c > 0$.

2 spitzwinklige Dreiecke für das positive und 2 stumpfwinklige für das negative Vorzeichen der innern Wurzel. Mit abnehmendem c nähern sich beide Formen dem rechtwinkligen Dreieck.

3. $c = 0$.

Die Kurve ist der doppelte gelegte Kreis $x^2 - bx + y^2 = 0$, welcher die Mittelsenkrechte in den Punkten $\left(\frac{b}{2}, \frac{b}{2}\right)$ und $\left(\frac{b}{2}, -\frac{b}{2}\right)$ schneidet; 4 rechtwinklige Dreiecke wie oben unter B_3.

Sämtliche Dreiecke dieser Gruppe genügen der Relation

$$s - m = \pm c.$$

Ihre Inhaltsformel lautet:

$$F = \frac{b}{4}\sqrt{b^2 + 2c^2 \pm 2c\sqrt{2b^2 + c^2}}. \qquad (7)$$

§ 22. *Zweites Lösungsverfahren: Bestimmung der Schnittpunkte D.*

Die Voraussetzungen sind dieselben wie in § 20.

Wir referieren über diesen Fall in gedrängter Kürze.

Analog dem ersten Verfahren erhalten wir als Hilfskurve eine unächte Kurve 8. Ordnung. Dieselbe hat die Form

$$\left[(x^2+y^2)\left(x+\frac{b}{2}\right)^2-c^2x^2\right]\left[(x^2+y^2)\left(x-\frac{b}{2}\right)^2-c^2x^2\right]=0. \quad (8)$$

Die Kurve besteht aus 2 *Konchoiden des Nikomedes.* Für beide ist die x-Axe Symmetrieaxe. Die Konchoide des Klammerausdrucks links hat die Gerade $x=-\frac{b}{2}$, diejenige des Klammerausdrucks rechts die Gerade $x=\frac{b}{2}$ zur Leitlinie.

Bei den Lösungen handelt es sich um die Bestimmung der Koordinaten der Schnittpunkte D der Konchoiden mit dem Grundkreis. Für die Abscisse x erhalten wir die Bestimmungsgleichung

$$bx\left(x\pm\frac{b}{2}\right)^2-c^2x^2=0;\ \text{daraus folgt}$$

$$x=\frac{c^2\pm b^2\pm c\sqrt{c^2\pm 2b^2}}{2b};$$

für das positive Zeichen im Ausdruck $\left(x\pm\frac{b}{2}\right)^2$ wird

$$x=\frac{c^2-b^2\pm c\sqrt{c^2-2b^2}}{2b}. \quad (9)$$

Alle diesbezüglichen Lösungen entsprechen der Relation:

$$s+m=c.$$

Führen wir den Wert für x aus (9) in der Gleichung des Grundkreises ein, so erhält man für die Ordinate y des Punktes D den Ausdruck:

$$y=\pm\frac{1}{2b}\sqrt{6b^2c^2-3b^4-2c^4\pm 2c\,(2b^2\mp c^2)\sqrt{c^2-2b^2}}. \quad (10)$$

Nun besteht die Proportion:

$$y:x=h_b:\frac{b}{2}.$$

Setzen wir hierin für x und y die gefundenen Werte ein und lösen nach h_b auf, so finden wir:

$$h_b = \pm\frac{1}{2}\sqrt{2c^2 - 3b^2 \pm 2c\sqrt{c^2 - 2b^2}}. \qquad (11)$$

Für das negative Zeichen im Ausdruck $\left(x \pm \frac{b}{2}\right)^2$ erlangt die Abscisse x von D den Wert

$$x = \frac{c^2 + b^2 \pm c\sqrt{c^2 + 2b^2}}{2b} \qquad (12)$$

und die Ordinate y den Wert

$$y = \pm\frac{1}{2b}\sqrt{b^4 - 2b^2c^2 - 2c^4 \mp 2c^3\sqrt{c^2 + 2b^2}}. \qquad (13)$$

Alle diesbezüglichen Lösungen erfüllen die Bedingung:

$$s - m = \pm c.$$

Für die Basishöhe dieser Dreiecke finden wir auf ähnliche Weise wie oben den Wert

$$h_b = \pm\frac{1}{2}\sqrt{b^2 + 2c^2 \pm 2c\sqrt{c^2 + 2b^2}}. \qquad (14)$$

Vergleichen wir (11) mit (4) und (14) mit (5), so finden wir vollkommene Übereinstimmung in den Ergebnissen beider Auflösungsmethoden.

VIII.

§ 23. *Achte Aufgabe. Konstruktion eines gleichschenkligen Dreiecks, wenn die Basis und die Summe oder Differenz aus Schenkelhöhe und dem der Basis angrenzenden Schenkelabschnitt gegeben sind.*

Gegeben: 1. b,
2. $h_s \pm m = \pm c =$ konstant.

Bedingungen: 1. $b\sqrt{2} \gtreqless (h_s + m) \geqq b$;
2. $b \gtreqless (h_s - m) \geqq -b$.

Im rechtwinkligen Dreieck ist $h_s + m = b\sqrt{2} =$ Maximum; denn da ist $h_s = m = \frac{b}{2}\sqrt{2}$. In diesem Fall ist nun $h_s + m = \sqrt{b}\left\{\sqrt{\frac{b}{2}} + \sqrt{\frac{b}{2}}\right\}$. Ist das Dreieck nicht rechtwinklig, so ist $h_s + m = \sqrt{b}\left\{\sqrt{\left(\frac{b}{2} + a\right)} + \sqrt{\left(\frac{b}{2} - a\right)}\right\}$. Es ist aber bekanntlich $\left(\sqrt{\frac{b}{2}} + \sqrt{\frac{b}{2}}\right) > \left(\sqrt{\left(\frac{b}{2} + a\right)} + \sqrt{\left(\frac{b}{2} - a\right)}\right)$.

Bei einem unendlich grossen Dreieck ist $h_s - m = b - 0 = b = \text{Max.}$ und bei einem unendlich kleinen Dreieck $= 0 - b = -b = \text{Min.}$ Bei einem spitzwinkligen Dreieck ist $h_s - m -$ pos., bei einem rechtwinkligen $= 0$ und bei einem stumpfwinkligen $=$ neg.

§ 24. *Erstes Lösungsverfahren. Bestimmung der Spitzen B.*

a) Konstruktion der Kurve. Taf. IV, Fig. 13.

Es sei $OA = b$ die Basis des Dreiecks. Wir ziehen den Grundkreis, die Mittelsenkrechte MM_1 und um A den Hilfskreis mit dem Radius $r = c$. Durch O werde nun ein Strahl gezogen, der den Grundkreis in Q schneidet. Ferner werde durch A und Q eine Gerade gelegt, welche den Hilfskreis in H und H_1 schneidet. Jetzt tragen wir auf dem Strahl OQ die Strecken QH und QH_1 von O aus in gleicher oder ungleicher Richtung ab und erhalten die Punkte T_1 und T_2. Gleiche Richtung ist nötig, wenn Q ausserhalb des Hilfskreises liegt. Hat Q negative Ordinate, so sind die Strecken nach Q hin abzutragen, im andern Fall nach der entgegengesetzten Seite. Endlich trägt man noch die Strecken QT_1 und QT_2 von R aus auf den Strahl OQ ab in der Richtung, wie T von Q aus liegt, und bekommt die Punkte P_1 und P_2. Bei sich drehendem Strahl beschreiben die Punkte P die Kurve. Die Schnittpunkte derselben mit der Mittelsenkrechten sind die Spitzen B; denn in diesem Fall ist $RP = 0$, also auch $QT = 0$; folglich fällt T auf Q; damit ist $OT = OQ = m$, QA ist $= h_s$, und eine der Relationen ist erfüllt:

$$h_s \pm m = c.$$

b) Ableitung der Kurvengleichung.

Es seien $(-x, -y)$ die rechtwinkligen Koordinaten eines Kurvenpunktes P_2 im gewohnten System; dann ist

$$OP_2 = \sqrt{x^2 + y^2}.$$

Nun ist $OP_2 = P_2R - OR = T_2Q - OR = T_2O + OQ - OR$,

somit $$\sqrt{x^2 + y^2} = T_2O + OQ - OR. \qquad (\alpha)$$

Ferner ist $T_2O = QH_1 = AQ + AH_1 = b\sin\varphi + c$,
$OQ = b\cos\varphi$,
$OR = \frac{b}{2x}\sqrt{x^2 + y^2}$,
} sub in (α),

es giebt $\sqrt{x^2+y^2} = b\sin\varphi + c + b\cos\varphi - \frac{b}{2x}\sqrt{x^2+y^2}$, umgeformt

$$\left[(x^2+y^2)\left(x-\frac{b}{2}\right)+bx(x+y)\right]^2 - c^2x^2(x^2+y^2) = 0. \quad (1)$$

Polargleichung: $r = \frac{b}{2\cos\varphi} - b(\cos\varphi + \sin\varphi) \pm c.$ (2)

c) Eigenschaften der Kurve.

Vorliegende Kurve ist von der 6. Ordnung. Sie hat im Nullpunkt einen 4fachen Punkt. Die *Gleichung der Tangenten im Nullpunkt* lautet:

$$y^4 - 4xy^3 + \frac{2b^2-4c^2}{b^2}x^2y^2 + 4x^3y + \frac{b^2-4c^2}{b^2}x^4 = 0. \quad (3)$$

Spezialfälle: 1. $c = 0$.

$y^4 - 4xy^3 + 2x^2y^2 + 4x^3y + x^4 = 0$, aufgelöst

$$y = (1 \pm \sqrt{2})x \text{ je 2mal.}$$

Die Tangenten müssen paarweise zusammenfallen, da die Kurve in 2 zusammenfallende Kurven 3. Ordnung zerfällt, deren Gleichung $(x^2+y^2)\left(x-\frac{b}{2}\right)+bx(x+y)=0$ ist. (4)

Diese Kurve ist strophoidenartig, siehe Fig. 13, Kurve II.

$$2. \quad c = \frac{b}{2}.$$

$$y^4 - 4xy^3 + x^2y^2 + 4x^3y = 0.$$

$y = 0$; die x-Axe ist Tangente.

Die Gleichung der übrigen 3 reellen Tangenten lautet:

$$y^3 - 4xy^2 + x^2y + 4x^3 = 0.$$

$$3. \quad c = \frac{b}{2}\sqrt{2}.$$

$$y^4 - 4xy^3 + 4x^3y - x^4 = 0.$$

Da $y = x$ der Gleichung genügt, so ist $y = x$ Tangente.

Die Gleichung der übrigen 3 reellen Tangenten lautet:

$$y^3 - 3xy^2 + x^3 = 0.$$

$$4. \quad c = \infty.$$

Die Kurve besteht aus der doppelt gelegten unendlich fernen Geraden und der doppelt gelegten y-Axe und dem konjugierten Punkt in O. Die y-Axe ist doppelt gelegte Tangente; die 2 andern Nullpunktstangenten sind imaginär.

Die x-Axe schneidet die Kurve im Nullpunkt 4mal; die andern 2 Schnittpunkte liegen in den Punkten $\left(-\frac{b}{2} \pm c\right)$. Die y-Axe schneidet die Kurve 4mal im Nullpunkt und 2mal im Unendlichen.

Aus der Form der Gleichung geht hervor, dass die imaginären Kreispunkte der Ebene Doppelpunkte der Kurve sind. Ebenso sagt uns die Gleichung, dass die Gerade $x = \frac{b}{2}$ doppelt gelegte Asymptote ist. Die Natur des unendlich fernen Punktes der Kurve wird durch Transformation bestimmt. Wir setzen $x = x' + \frac{b}{2}$ und $y = y'$ und erhalten

$$\left\{\left[\left(x' + \frac{b}{2}\right)^2 + y'^2\right]x' + b\left(x' + \frac{b}{2}\right)\left(x' + \frac{b}{2} + y'\right)\right\}^2 - c^2\left(x' + \frac{b}{2}\right)^2\left[\left(x' + \frac{b}{2}\right)^2 + y'^2\right] = 0.$$

Nun projizieren wir den unendlich fernen Punkt der Kurve auf die x-Axe, indem wir setzen

$$y' = \frac{1}{y''} \text{ und } x' = \frac{x''}{y''} \text{ und erhalten:}$$

$$\left[\left(x''^2 + by''x'' + \frac{b^2y''^2}{4} + 1\right)x'' + by''\left(x'' + \frac{by''}{2}\right)\left(x'' + \frac{by''}{2} + 1\right)\right]^2 - c^2y''^2\left(x''^2 + bx''y'' + \frac{b^2}{4}y''^2\right)\left(x''^2 + bx''y'' + \frac{b^2}{4}y''^2 + 1\right) = 0. \quad (5)$$

Der Nullpunkt der projizierten Kurve ist Doppelpunkt. Die Gleichung der Doppelpunktstangenten lautet:

$x''^2 = 0$; folglich fallen die beiden Tangenten mit der y'-Axe zusammen. Da ferner für $x'' = 0$ $y'' = 0$ wird und zwar 4mal, so muss der Nullpunkt Selbstberührungspunkt sein. Es ist somit auch der unendlich ferne Punkt der Kurve *Selbst-*

berührungspunkt und die Gerade $x = \frac{b}{2}$ *Selbstberührungsasymptote*. Die Kurve ist also *rational;* denn sie besitzt 10 Doppelpunkte, nämlich 6 im 4fachen Punkt O, 2 im unendlich fernen Selbstberührungspunkt und 2 in den imaginären Kreispunkten der Ebene.

Für $c = b$ fallen 5 Schnittpunkte der Geraden $x = \frac{b}{2}$ mit der Kurve ins Unendliche. In diesem Fall ist die Mittelsenkrechte *Selbstberührungswendeasymptote* und der unendlich ferne Punkt der Kurve ein Selbstberührungspunkt mit *einfachem Inflexionsknoten.*

Die Kurve ist keine symmetrische Kurve.

d) Die Lösungen.

Um die Schnittpunkte B zu bekommen, führen wir für x den Wert $x = \frac{b}{2}$ in der Kurvengleichung (1) ein und erhalten

$$y = \frac{-b^3 \mp bc\sqrt{2b^2 - c^2}}{2(b^2 - c^2)}. \qquad (6)$$

Für jeden Wert von $c \gtrless b\sqrt{2}$ giebt es 2 reelle Werte für y, also 2 reelle Lösungen. Die Hauptfälle sind folgende:

A. $c > b\sqrt{2}$.

y wird imaginär; keine reellen Lösungen.

B. $c \lessgtr b\sqrt{2}$; 2 reelle Lösungen.

1. $c = b\sqrt{2}$.

$y_1 = y_2 = \frac{b}{2}$; 2 zusammenfallende rechtwinklige Dreiecke.

2. $c = b$.

$y_1 = 0$ und $y_2 = \infty$; ein unendlich kleines und ein unendlich grosses Dreieck.

3. $c = \frac{b}{2}\sqrt{2}$; $\quad y = -\frac{b}{2}(2 \mp \sqrt{3})$.

4. $c = \frac{b}{2}$; $\quad y = -\frac{b}{6}(4 \mp \sqrt{7})$.

In beiden Fällen ein stumpfwinkliges und ein spitzwinkliges Dreieck.

5. $c = 0$; $\quad y_1 = y_2 = -\frac{b}{2}$.

2 zusammenfallende rechtwinklige Dreiecke OAB'. Fig. 13.

6. $c = \frac{b}{2}(\sqrt{3} \pm 1)$; $y_1 = \pm \frac{b}{2}\sqrt{3}$ und $y_2 = \pm \frac{b}{6}\sqrt{3}$.

Das spitzwinklige Dreieck ist gleichseitig und das stumpfwinklige Dreieck hat Basiswinkel von 30° und eine Schenkelhöhe von $h_s = \frac{b}{2}$.

Lässt man c von b aus einmal wachsen bis $c = b\sqrt{2}$, das andere Mal abnehmen bis $c = 0$, so sind die Lösungen im 2. Fall symmetrisch zu denjenigen im ersten Fall.

Setzt man $y = -y$, so geht Gleichung (1) über in

$$\left[(x^2+y^2)\left(x-\frac{b}{2}\right)+bx(x-y)\right]^2 - c^2x^2(x^2+y^2) = 0. \quad (7)$$

Die Kurve ist das Spiegelbild der erstern in Bezug auf die x-Axe. Mit den Lösungen ist es dasselbe; dabei giebt es für die Basishöhe den Ausdruck

$$h_b = y = \frac{b^3 \pm bc\sqrt{2b^2-c^2}}{2(b^2-c^2)}. \quad (8)$$

Als Inhaltsformel des Dreiecks erhalten wir nach (6)

$$F = \frac{-b^4 \pm b^2c\sqrt{2b^2-c^2}}{4(b^2-c^2)}. \quad (9)$$

§ 24. *Zweites Lösungsverfahren: Bestimmung der Fusspunkte D der Schenkelhöhen.* Ohne Figur.

Diese Aufgabe kann elementar gelöst werden, wenn wir aus den drei Grössen b, m und h_s zuerst ein rechtwinkliges Dreieck konstruieren wollen. Will man aber direkt das gleichschenklige Dreieck gewinnen, bedarf es auch hier der Konstruktion einer Kurve höherer Ordnung. Diese Hilfskurve wird eine *Kreiskonchoide,* deren Gleichung:

$(x^2+y^2+by)^2 - c^2(x^2+y^2) = 0$ ist (vergleiche VI (1), pag. 64). (10)

Für die Koordinaten der Punkte D erhalten wir

$$\left.\begin{aligned} x &= \frac{b^2 \pm c\sqrt{2b^2-c^2}}{2b} \\ \text{und } y &= \pm\frac{c^2-b^2}{2b}, \text{ wobei nur das positive} \end{aligned}\right\} \quad (11)$$

Zeichen verwendet werden darf. Das negative Zeichen entspricht den Lösungen der Spiegelbildkurve in Bezug auf die x-Axe.

Setzt man in der Proportion:

$$y : h_b = x : \frac{b}{2}$$ für x und y die Werte von (11) ein, so erhält man für h_b den Wert nach Formel (6); damit ist nachgewiesen, dass beide Verfahren die gleichen Ergebnisse liefern.

Berechnen wir mit Hilfe von (11) m, denn $m = \sqrt{x^2 + y^2}$ und h_s, denn $h_s = \sqrt{b^2 - m^2}$, so finden wir, dass bei jedem spitzwinkligen Dreieck die Strecke $m = OD$ gleich ist der Grösse h_s bei dem zugehörigen stumpfwinkligen Dreieck und umgekehrt. Bei allen Lösungen gilt die Relation

$$h_s + m = c, \text{ wenn } c > b,$$
$$h_s \pm m = c, \quad » \quad c = b \text{ und}$$
$$h_s - m = c, \quad » \quad c < b \text{ ist.}$$

IX.

§ 26. *Neunte Aufgabe: Konstruktion eines gleichschenkligen Dreieckes, wenn die Basis und die Summe oder Differenz aus Schenkel und Basishöhe gegeben sind.*

Gegeben: 1. b,
2. $s \pm h_b = \pm c =$ konstant.

Bedingungen: 1. $s + h_b \gtreqless \frac{b}{2}$,

2. $s - h_b \lesseqgtr \frac{b}{2}$.

Die Summe ist das Minimum bei einem unendlich kleinen Dreieck; da ist $s = \frac{b}{2}$ und $h_b = 0$. Umgekehrt ist die Differenz bei einem unendlich kleinen Dreieck das Maximum und nimmt stetig ab bis 0, wenn das Dreieck wächst und schliesslich unendlich gross wird.

§ 27. *Erstes Verfahren. Bestimmung der Fusspunkte D.*

a) Konstruktion der Hilfskurve. Taf. IV, Fig. 14.

Es sei $OA = b$ die Basis des Dreiecks. Wir ziehen den Grundkreis und die Mittelsenkrechte, auf welcher wir von C aus

die Konstante c nach E abtragen. Durch O laufe nun ein Strahl, der den Grundkreis in Q und die Mittelsenkrechte in R schneidet. Nun tragen wir die Strecke RE von O aus auf dem Strahl OQ nach beiden Seiten ab und bekommen die beiden Punkte T_1 und T_2. Schliesslich tragen wir noch die Strecken RT_1 und RT_2 auf dem Strahl OQ von Q aus ab und zwar in der Richtung, in welcher von der Mittelsenkrechten aus die Punkte T liegen. Die gewonnenen Punkte seien P_1 und P_2, welche bei sich drehendem Strahl die Kurve beschreiben. Die Schnittpunkte derselben mit dem Grundkreis liefern die zunächst gesuchten Punkte D; denn fällt ein Kurvenpunkt P in den Grundkreis, so ist $QP = 0$, also auch $RT = 0$. Im letztern Fall kommt T in die Mittelsenkrechte zu liegen, und es ist ferner $OT = RE = OB = s$ und da auch $RC = h_b$ ist, so muss sich eine der Bedingungen erfüllen:

$$s \pm h_b = c.$$

b) Ableitung der Kurvengleichung.

Wir legen in gewohnter Weise das Koordinatensystem. x und y seien die Koordinaten des Kurvenpunktes P_1; dann ist

$$OP_1 = \sqrt{x^2+y^2};$$

$$OP_1 = OQ - T_1R = OQ - OR + OT_1 = \sqrt{x^2+y^2}. \quad (\alpha)$$

Nun ist $OQ = b\cos\varphi$,

$$OR = \frac{b}{2\cos\varphi}$$

und $OT_1 = EC - RC = c - \frac{b}{2}\operatorname{tg}\varphi$,

} sub. in (α), so giebt es

$$b\cos\varphi - \frac{b}{2\cos\varphi} + c - \frac{b}{2}\operatorname{tg}\varphi = \sqrt{x^2+y^2}, \text{ umgeformt}$$

$$[(x^2+y^2)(2x-b) - 2bx^2]^2 - (by - 2cx)^2(x^2+y^2) = 0. \quad (1)$$

Für ein negatives c bekommen wir die Spiegelbildkurve in Bezug auf die x-Axe. In der Gleichung (1) ändert bloss das mit c behaftete Glied Vorzeichen. Löst man Gleichung (1) auf, so verschwindet das Glied b^2y^4; dann lässt sich der Faktor x in allen Gliedern wegdividieren und wir erhalten:

$$(x^2+y^2)^2x - (x^4-y^4)b + (x^2-3y^2)\frac{b^2x}{4}$$
$$+ (x^2+y^2)(by-cx)c = 0. \quad (2)$$

Polargleichung: $r = \dfrac{b\cos 2\varphi \pm (b\sin\varphi - 2c\cos\varphi)}{2\cos\varphi}$

$$= \frac{b\cos 2\varphi}{2\cos\varphi} \pm \left(\frac{b}{2}\operatorname{tg}\varphi - c\right). \quad (2\alpha)$$

c) Diskussion der Kurvengleichung.

Die Kurve ist von der 5. Ordnung und hat im Nullpunkt einen 3fachen Punkt. Die Gleichung der *Nullpunktstangenten* lautet:

$$\left(\frac{y}{x}\right)^3 - \frac{3b^2+4c^2}{4bc}\cdot\left(\frac{y}{x}\right)^2 + \frac{y}{x} + \frac{b^2-4c^2}{4bc} = 0. \quad (3)$$

Spezialfälle:

1. $c = 0$; $\quad \dfrac{b^2}{4}\, x\,(x^2 - 3y^2) = 0.$

$\alpha)$ $x = 0.$

$\beta)$ $y = \pm\dfrac{x}{3}\sqrt{3}.$

Die Gleichung der Kurve selbst nimmt die Form an

$$(x^2+y^2)[(x^2+y^2)x - b(x^2-y^2)] + (x^2-3y^2)\frac{b^2x}{4} = 0. \quad (4)$$

Diese Spezialkurve allein ist symmetrisch und zwar in Bezug auf die x-Axe. Nach y aufgelöst erhalten wir

$$y = \pm\sqrt{\frac{3b^2x - 8x^3 \pm bx\sqrt{9b^2-16bx}}{8(x+b)}}.$$

$x = \dfrac{9b}{16}$ ist der Maximalwert, den x annehmen kann. Für diesen Grenzwert von x wird $y = \pm\dfrac{3b}{16}\sqrt{0{,}6}$. Die Kurve bildet eine Doppelschleife, welche ganz innerhalb des Grundkreises liegt, denselben im Nullpunkt berührt und aus 2 kongruenten Schleifen besteht, die sich im Punkt $\left(\dfrac{b}{2}, 0\right)$ schneiden.

2. $c = \dfrac{b}{2}$; $\quad \left(\dfrac{y}{x}\right)^3 - 2\left(\dfrac{y}{x}\right)^2 + \dfrac{y}{x} = 0$:

$\alpha)$ $y = 0$; die x-Axe ist Tangente.

$\beta)$ $y = x$ 2mal; diese Tangente ist eine Selbstberührungstangente, welche die Kurve im Nullpunkt zudem noch schneidet.

Alle Schnittpunkte der Geraden $y = x$ mit der Kurve fallen daher in den Nullpunkt. Von den 3 Doppelpunkten, die im 3fachen Punkte O liegen, ist der eine also ein Selbstberührungspunkt. Die 4 Doppelpunkte, welche die Kurve im Endlichen hat, stecken für $c = \frac{b}{2}$ alle im Nullpunkt.

Die x-Axe schneidet die Kurve in O 3mal und 2mal in den Punkten $-\frac{b}{2} \pm c$. Die y-Axe schneidet die Kurve 3mal in O, einmal in $(0, -c)$ und einmal im Unendlichen.

Die imaginären Kreispunkte der Ebene sind Doppelpunkte der Kurve; diese ist somit *rational;* denn sie besitzt 6 Doppelpunkte, 4 im Endlichen und 2 im Unendlichen, so lange c endlich ist.

Die Gerade $x = -b$ ist *Wendeasymptote.* (4)

Die Kurve hat *Wendepunkte.* Ist O Knotenpunkt, so besitzt die Kurve einen Wendepunkt im Unendlichen. Ist O isolierter Punkt, so sind 3 Wendepunkte vorhanden, wovon 2 im Endlichen sind.

Für ein unendlich grosses c besteht die Kurve aus der y-Axe, der doppelt gelegten unendlich fernen Geraden und dem isolierten Punkt in O.

d) Die Lösungen.

Wir suchen die Fusspunkte D der Schenkelhöhen zunächst. Für die Koordinaten von D finden wir die Werte

$$x = \frac{16\,b^3 c^2}{(b^2 + 4c^2)^2} \tag{5}$$

$$\text{und} \quad y = \pm \frac{4\,b^2 c\,(4c^2 - b^2)}{(b^2 + 4c^2)^2}. \tag{6}$$

Das negative Zeichen gilt für die Lösungen der Spiegelbildkurve. Wir bekommen für einen bestimmten Wert von c nur *eine* reelle Lösung; das rührt daher, weil $s + h$ nicht kleiner als $\frac{b}{2}$ und $s - h_b$ nicht grösser als $\frac{b}{2}$ werden kann. Wir bekommen folgende Hauptfälle:

$$\text{A.} \quad c > \frac{b}{2}.$$

Alle Lösungen genügen der Bedingung: $s + h_b = c$.

1. $c > \frac{b}{2}(1+\sqrt{2})$; $0 < x < \frac{b}{2}$.

Das Dreieck ist spitzwinklig und wird speziell gleichseitig, wenn $c = \frac{b}{2}(2+\sqrt{3})$ ist.

2. $c = \frac{b}{2}(1+\sqrt{2})$; $x = \frac{b}{2}$.

Das Dreieck ist rechtwinklig.

3. $\frac{b}{2}(1+\sqrt{2}) > c > \frac{b}{2}$; $\frac{b}{2} < x < b$.

Das Dreieck ist stumpfwinklig.

B. $c = \frac{b}{2}$, Grenzfall; $x = b$.

Das Dreieck ist unendlich klein und genügt der Relation: $s \pm h_b = c$.

C. $c < \frac{b}{2}$.

Die Dreiecke erfüllen die Bedingung: $s - h_b = 0$.

1. $\frac{b}{2}(\sqrt{2}-1) < c < \frac{b}{2}$; $\frac{b}{2} < x < b$.

Das Dreieck ist stumpfwinklig.

2. $c = \frac{b}{2}(\sqrt{2}-1)$; $x = \frac{b}{2}$.

Das Dreieck ist rechtwinklig.

3. $\frac{b}{2}(\sqrt{2}-1) > c > 0$; $\frac{b}{2} > x > 0$.

Das Dreieck ist spitzwinklig und wird für $c = \frac{b}{2}(2-\sqrt{3})$ speziell gleichseitig.

4. $c = 0$; $x = 0$.

Das Dreieck ist unendlich gross, wie es bei A für $c = \infty$ wird.

Für die Basishöhe BC findet man nach bekannter Proportion den Ausdruck:

$$h_b = \frac{4c^2 - b^2}{8c}. \qquad (8)$$

Für die Lösungen der Spiegelbildkurve ist dieser Wert negativ zu nehmen.

Für die Dreiecksfläche erhält man nach (8) die Formel

$$F = \frac{(4c^2 - b^2)b}{16c}. \tag{9}$$

§ 28. *Zweites Verfahren. Bestimmung der Spitzen B.*

Diese Aufgabe ist schon elementar ohne Mühe lösbar. Es ist ja $s^2 = \frac{b^2}{4} + h_b^2$. Berücksichtigt man, dass $s \pm h_b = c$, so findet man $h_b = \pm \frac{4c^2 - b^2}{8c}$, was mit (8) vollkommen übereinstimmt. Die elementare Lösung auf konstruktivem Wege erfordert 2 verschiedene Konstruktionen, je nachdem die Summe oder Differenz von s und h_b vorliegt. Soll die gleiche Konstruktion beide Fälle einschliessen, so wird eine Hilfskurve nötig. Ihre Gleichung lautet:

$$(x^2 + y^2)4x^2 - (by - 2cx)^2 = 0. \tag{10}$$

Wir haben dieselbe unter V (8), pag. 60, bereits kennen gelernt. In unserm Fall hat die Kurve den Selbstberührungspunkt in O.

Ihre Asymptoten sind $x = \pm \frac{b}{2}$.

Bei den Lösungen handelt es sich um die Schnittpunkte B der Mittelsenkrechten $x = \frac{b}{2}$ mit der Kurve. Für die Ordinate von B finden wir den Wert $y = h_b = \frac{4c^2 - b^2}{8c}$. (11)

Dieser Wert stimmt mit (8) überein. Beide Verfahren decken sich somit vollständig in ihren Resultaten.

X.

§ 29. *Zehnte Aufgabe. Konstruktion eines gleichschenkligen Dreieckes, wenn die Basis und die Summe oder Differenz aus Basishöhe und dem an die Basis angrenzenden Schenkelabschnitt gegeben sind.*

Gegeben: 1. b,
2. $h_b \pm m = \pm c =$ konstant.

Bedingungen: 1. $h_b + m \gtreqless b$,

2. $h_b - m \lesseqgtr 0$.

Die Summe $h_b + m$ wird zum Minimum b beim unendlich kleinen Dreieck, wo $m = b$ und $h_b = 0$ ist. Die Differenz $h_b - m$ wird $= 0$ bei einem spitzwinkligen Dreieck, dessen Höhe

$$h_b = \frac{b}{4}\sqrt{2\sqrt{17} - 2} \text{ ist.}$$

Übersteigt h_b diesen Wert, so ist die Differenz $h_b - m = $ pos. Sinkt dagegen h_b unter diesen Wert, so ist $h_b - m =$ neg. und wird für ein unendlich kleines Dreieck $= -b$.

§ 30. *Erstes Lösungsverfahren. Bestimmung der Spitzen B.*

a) Konstruktion der Hilfskurve.

Es sei $OA = b$ die Basis des Dreiecks. Ziehe den Grundkreis, die Mittelsenkrechte und um O noch einen Hilfskreis mit dem Radius $r = c$. Ein Strahl durch O schneide nun den Grundkreis in Q und den Hilfskreis in H und H_1. Schlage von C aus einen Kreisbogen mit dem Radius $r = QH$ und einen zweiten Bogen mit dem Radius $r = QH_1$. Erhalte im Strahl 4 Schnittpunkte P_1, P_2, P_3 und P_4. Bei sich drehendem Strahl beschreiben die Punkte P die Kurve. Fällt ein Kurvenpunkt P in die Mittelsenkrechte, so ist $QH = CP = CB = h_b$, und da ferner in diesem Fall $OQ = m$ ist, so lässt sich die Relation aufstellen: $h_b \pm m = OH = c$. Somit haben wir in den Schnittpunkten der Kurve mit der Mittelsenkrechten die gesuchten Spitzen B.

b) Ableitung der Kurvengleichung.

Lege in gewohnter Weise das Koordinatensystem. x und y seien die Koordinaten des Kurvenpunktes P_1; dann gilt

$$CP_1 = \sqrt{\left(\frac{b}{2} - x\right)^2 + y^2}. \qquad (\alpha)$$

Nun ist $CP_1 = QH = OH - OQ = c - b\cos\varphi$, eingesetzt in (α) ergiebt $c - b\cos\varphi = \sqrt{\left(\frac{b}{2} - x\right)^2 + y^2}$, umgeformt

$$\left\{(x^2+y^2)\left[y^2+\left(\frac{b}{2}-x\right)^2\right]-c^2(x^2+y^2)-b^2x^2\right\}^2$$
$$-4b^2c^2x^2(x^2+y^2)=0. \quad (1)$$

Polargleichung: $r=\frac{b\cos\varphi}{2}$

$$\pm\frac{1}{2}\sqrt{(2b\cos\varphi+b\sin\varphi\pm 2c)(2b\cos\varphi-b\sin\varphi\pm 2c)}. \quad (2)$$

c) Eigenschaften der Kurve.

Die Kurve ist von der 8. Ordnung und hat im Nullpunkt einen 4fachen Punkt. Die *Gleichung der Tangenten im Nullpunkt* lautet:

$$y=\pm\frac{x}{b^2-4c^2}\sqrt{3b^4+24b^2c^2-16c^4\pm 16b^3c}. \quad (3)$$

1. $0\leqq c\leqq\frac{b}{2}$; O ist Knotenpunkt; alle 4 Tangenten sind reell.

2. $\frac{b}{2}<c\leqq\frac{3b}{2}$; O ist Doppelpunkt und isolierter Punkt; 2 Tangenten sind reell, 2 imaginär.

3. $c>\frac{3b}{2}$; O ist isolierter Punkt; alle 4 Tangenten sind imaginär.

Die Kurve liegt zur x-Axe symetrisch; denn y kommt nur in geraden Potenzen vor. Die Kurve hat nicht nur in O, sondern auch in den imaginären Kreispunkten der Ebene 4fache Punkte. Für endliche Werte von c liegen keine Kurvenpunkte im Unendlichen; die Kurve kann daher keine Asymptoten haben. Wir betrachten nun die einzelnen Kurvenformen bei veränderlichem c.

1. $c=0$.

Die Kurve zerfällt in 2 zusammenfallende Kurven 4. Ordnung, deren Gleichung die Form hat

$$(x^2+y^2)\left\{y^2+\left(\frac{b}{2}-x\right)^2\right\}-b^2x^2=0. \quad (4)$$

Die Kurve (4) besteht aus einer Doppelschleife mit ungleichen Blättern. Die Tangenten in O sind $y=\pm x\sqrt{3}$. Die y-Axe schneidet die Kurve 2mal in O und 2mal imaginär, die

x-Axe 2mal in O und dann noch in $x_3 = \frac{3b}{2}$ und $x_4 = -\frac{b}{2}$. Bei wachsendem c wird die eine Doppelschleife grösser und die andere kleiner und so geht es, bis $c = b/2$ wird. Für diesen Wert von c verliert die kleinere Doppelschleife die kleinere Schleife, welche zu einer Spitze zusammenschrumpft.

$$2. \quad c = \frac{b}{2}.$$

Die Gleichung der Kurve lautet nun

$$[(x^2+y^2)(x^2+y^2-bx)-b^2x^2]^2 - b^4x^2(x^2+y^2) = 0. \qquad (5)$$

Die positive x-Axe ist Rückkehrtangente und die y-Axe doppelt gelegte Wendetangente. O ist also Doppelinflexionsknoten und Spitze. Alle Schnittpunkte der Axen mit der Kurve sind reell und bleiben von da weg reell. In allgemeiner Form sind die Schnittpunkte mit der x-Axe:

$$1. \ x = 0, \ 4\text{mal}; \quad 2. \ x = \frac{3b}{2} \pm c; \quad 3. \ x = -\frac{b}{2} \pm c.$$

Die Schnittpunkte mit der y-Axe:

$$1. \ y = 0, \ 4\text{mal}; \quad 2. \ y = \pm\sqrt{c^2 - \frac{b^2}{4}} \ 2\text{mal}.$$

Wächst nun c von $\frac{b}{2}$ bis b, so verwandelt sich die Doppelschleife in eine 4fache Schleife. Die 2 grössern Schleifen dehnen sich aus in der Richtung der x-Axe, die 2 kleinern längs der y-Axe. Das kleinere innere Blatt löst sich los vom Nullpunkt, nimmt Eiform an, schrumpft mehr und mehr zusammen und wird schliesslich zum isolierten Punkt in C $\left(\frac{b}{2}, 0\right)$.

$$3. \quad c = b.$$

Die Kurve besteht aus einer in sich geschlossenen Linie, welche in der y-Axe 3 Doppelpunkte bildet, wovon einer in O liegt. Ferner gehören zu ihr noch 2 isolierte Punkte O und C. Die Gleichung der reellen Tangenten in O lautet

$$y = \pm x\sqrt{3}.$$

Diese Spezialkurve ist rational; denn sie besitzt neben den 3 vierfachen Punkten noch 3 Doppelpunkte, was zusammen für 21 Doppelpunkte zählt. Die 3 Doppelpunkte haben die Koordinaten

$$\left(\frac{b}{2}, 0\right), \left(0, \frac{b}{2}\sqrt{3}\right) \text{ und } \left(0, -\frac{b}{2}\sqrt{3}\right).$$

Wächst c über b hinaus, so nähern sich die 2 Schleifen längs der y-Axe der Mittelsenkrechten und um den Punkt C bildet sich wieder ein isoliertes Blättchen. Für einen gewissen Wert von c, den wir nicht ermitteln konnten, hängt sich das kleinere innere Kurvenstück an den andern Kurvenzweig. Wird c noch grösser, so bildet die Kurve 2 Blätter, die sich teilweise überlagern und von denen das eine die Form der Kreiskonchoide hat. Für $c = \frac{3b}{2}$ hat das konchoidenähnliche Blatt in O eine Spitze mit der negativen x-Axe als Rückkehrtangente.

$$4. \quad c > \frac{3b}{2}.$$

Die Kurve hat in O keine reellen Tangenten mehr. Der Mittelpunkt ist 2fach isolierter Punkte. Die Kurve bildet 2 Blätter, die sich teilweise überlagern, was bei weiter wachsendem c so bleibt.

Für ein unendlich grosses c besteht die Kurve aus dem doppelt gelegten unendlich grossen Kreis und dem 2fach isolierten Punkt in O.

d) Die Lösungen.

Es handelt sich um die Bestimmung der Spitzen B. Für jeden Wert von c giebt es 4 Schnittpunkte B der Kurve mit der Mittelsenkrechten. Wir bekommen also immer 4 reelle Lösungen, welche nach Konstruktion paarweise symmetrisch sind. Die allgemeine Lösung stösst auf Schwierigkeiten. Setzt man jedoch in der Kurvengleichung (1) für x den Wert $\frac{b}{2}$ und für y Spezialwerte wie $y = 0$, $y = \frac{b}{2}$, $y = \frac{b}{2}\sqrt{3}$ etc. ein, so kann man für besondere Lösungen den zugehörigen Wert von c berechnen. Ehe wir die Hauptfälle bringen, bemerken wir noch, dass ein Dreieckspaar immer spitzwinklig ist, das andere dagegen jede beliebige Form annehmen kann.

1. $c = 0; \quad y = h_b = \pm \frac{b}{4} \sqrt{-2 + 2\sqrt{17}}$, 2mal.

Alle 4 Dreiecke sind spitzwinklig, kongruent und fallen paarweise zusammen und sind paarweise symmetrisch.

2. $0 < c < (\sqrt{2} - 1)\frac{b}{2}$;

ein Paar symmetrischer Lösungen wird spitzwinkliger, das andere Paar weniger spitzwinklig.

3. $c = (\sqrt{2} - 1)\frac{b}{2}$.

Das zweite Paar wird rechtwinklig.

4. $(\sqrt{2} - 1)\frac{b}{2} < c < b$.

Das zweite Paar ist stumpfwinklig. Für $c = \frac{b}{2}(\sqrt{3} - 1)$ wird das erste Paar gleichseitig.

5. $c = b$.

Das zweite Paar ist unendlich klein.

6. $b < c < (\sqrt{2} + 1)\frac{b}{2}$.

Das zweite Paar ist wieder stumpfwinklig.

7. $c = (\sqrt{2} + 1)\frac{b}{2}$; zweites Paar ist rechtwinklig.

8. $c > (\sqrt{2} + 1)\frac{b}{2}$; auch das zweite Paar ist spitzwinklig und wird speziell für $c = (\sqrt{3} + 1)\frac{b}{2}$ gleichseitig.

9. $c = \infty$.

Alle 4 Dreiecke sind unendlich gross.

§ 31. *Zweites Lösungsverfahren. Bestimmung der Schnittpunkte D.*

Bedingungen wie in § 29.

Wir bekommen eine unächte Kurve 8. Ordnung als Hilfskurve. Ihre Gleichung hat die Form

$$\{4x^2(x^2+y^2) - (2cx - by)^2\}\{4x^2 \cdot (x^2+y^2) - (2cx + by)^2\} = 0. \quad (6)$$

Die Kurve (6) zerfällt in die 2 Kurven 4. Ordnung:

$$4x^2(x^2+y^2) - (2cx - by)^2 = 0 \quad (7)$$

und

$$4x^2(x^2+y^2) - (2cx + by)^2 = 0. \quad (8)$$

Die beiden Teilkurven sind Spiegelbilder voneinander in Bezug auf beide Axen. Wir haben es daher im Grund nur mit einer Kurve 4. Ordnung zu tun. Sie ist uns in der Form begegnet in $IX_{(10)}$, pag. 85, und wurde beschrieben im V. Abschnitt. Die Lösungen lassen sich ebenfalls nicht allgemein bestimmen. Man kann nur für Spezialdreiecke die zugehörigen Werte von c berechnen. Man findet ganz dieselben Resultate wie oben. Zu jeder Teilkurve gehören zwei ungleiche Lösungen mit Ausnahme des Falles, da $c = o$ ist, wo dieselben zusammenfallen. Die Dreiecke, die zu den zwei Teilkurven gehören, sind Spiegelbilder voneinander in Bezug auf die x-Axe.

In allen Fällen, da $c < b$ ist, entsprechen die Dreiecke der Relation: $h_b - m = \pm c$. Ist $c = b$, so gilt $h_b \pm m = \pm c$. Ist $c > b$, so finden wir die Bedingung erfüllt: $h_b \pm m = + c$ (vergleiche § 29).

§ 32. *Uebersichtliche Zusammenstellung der Resultate.*

I.

Gegeben: b und $h_b \pm n = c$.

Lösungen:

1. $c > \frac{b}{2}\sqrt{6\sqrt{3}-9}$; 1 reelles Dreieck;

2. $c \lessgtr \frac{b}{2}\sqrt{6\sqrt{3}-9}$; 3 reelle Dreiecke.

II.

Gegeben: b und $s \pm n = c$.

Lösungen:

Für jeden Wert von $c \neq 0$ 2 reelle, symmetrische Dreiecke. Für $c = 0$ 4 reelle, zusammenfallende Dreiecke, die unendlich klein sind.

III.

Gegeben: b und $h_s \pm n = c$.

Lösungen:

1. $c > \frac{b}{2}\sqrt{3\sqrt[3]{13+16\sqrt{2}} + 3\sqrt[3]{13-16\sqrt{2}} - 1}$; 2 reelle verschiedene Dreiecke;

2. $c \leqq \frac{b}{2}\sqrt{\quad}$ obiger Ausdruck; 4 reelle, verschiedene Dreiecke.

IV.

Gegeben: b und $m \pm n = c$.
Lösungen:

1. $c > \frac{3b}{2}$; 2 reelle symmetrische Dreiecke;
2. $c \leqq \frac{3b}{2}$; 4 reelle, paarweise symmetrische Dreiecke.

V.

Gegeben: b und $h_b \pm h_s = c$.
Lösungen:

1. $c > \frac{b}{2}\sqrt{3(1+\sqrt[3]{4}-2\sqrt[3]{2})}$; 2 reelle verschiedene Dreiecke.
2. $c \leqq$ do. 4 do.

VI.

Gegeben: b und $s \pm h_s = c$.
Lösungen:

1. $c > 0$; 2 reelle verschiedene Dreiecke;
2. $c = 0$; 4 zusammenfallende rechtwinklige Dreiecke.

VII.

Gegeben: b und $s \pm m = c$.
Lösungen:

1. $c > \frac{3b}{2}$; 4 reelle, paarweise symmetrische Dreiecke;
2. $\frac{3b}{2} \leqq c \geqq b\sqrt{2}$; 6 reelle, paarweise symmetrische Dreiecke;
3. $b\sqrt{2} > c > \frac{b}{2}$; 2 reelle, symmetrische Dreiecke;
4. $c \leqq \frac{b}{2}$; 4 reelle, paarweise symmetrische Dreiecke.

VIII.

Gegeben: b und $h_s \pm m = c$.
Lösungen:

1. $c > b\sqrt{2}$; keine reellen Dreiecke;
2. $c \gtreqless b\sqrt{2}$; 2 reelle Dreiecke.

IX.

Gegeben: b und $s \pm h_b = c$.
Lösungen: Für jeden Wert von c 1 reelles Dreieck.

X.

Gegeben: b und $h_b \pm m = c$.
Lösungen: Für jeden Wert von c 4 reelle, paarweise symmetrische Dreiecke.

Nur bei einem Fall (VIII) kann es vorkommen, dass keine reelle Lösung möglich ist. Als Bestimmungsgrösse tritt hier $h_s \pm m = c$ auf. h_s und m sind nun gerade die Dreiecksgrössen, die bei endlicher Basis nicht unendlich werden können; das Maximum für beide ist b.

Für *Spezialdreiecke* giebt es folgende Wertetafel für c:

Fälle	unendlich kleines △	rechtwinkliges △	gleichseitiges △	unendlich grosses △
I. $h_b \pm n = c$	$c = \frac{b}{2}$	$c = \frac{b}{2}$	$c = \frac{b}{2}\sqrt{4 - 2\sqrt{3}}$	$c = \infty$
II. $s \pm n = c$	$= 0$	$= \frac{b}{2}\sqrt{2}$	$= \frac{3b}{2}$	$= \infty$
III. $h_s \pm n = c$	$= \frac{b}{2}$	$= \frac{b}{2}\sqrt{2}$	$= \frac{b}{2}(\sqrt{3}+1)$	$= \infty$
IV. $m \pm n = c$	$= \frac{3b}{2}$	$= \frac{b}{2}\sqrt{2}$	$= 0$	$= \infty$
V. $h_b \pm h_s = c$	$= 0$	$= \frac{b}{2}(\sqrt{2}\pm 1)$	$= 0$ od. $= b\sqrt{3}$	$= \infty$
VI. $s \pm h_s = c$	$= \frac{b}{2}$	$= 0$ od. $= b\sqrt{2}$	$= \frac{b}{2}(2\pm\sqrt{3})$	$= \infty$
VII. $s \pm m = c$	$= \frac{b}{2}$ od. $= \frac{3b}{2}$	$= 0$ od. $= b\sqrt{2}$	$= \frac{b}{2}$ od. $= \frac{3b}{2}$	$= \infty$
VIII. $h_s \pm m = c$	$= b$	$= 0$ od. $= b\sqrt{2}$	$= \frac{b}{2}(\sqrt{3}\pm 1)$	$= b$
IX. $s \pm h_b = c$	$= \frac{b}{2}$	$= \frac{b}{2}(\sqrt{2}\pm 1)$	$= \frac{b}{2}(2\pm\sqrt{3})$	$= 0$ od. $= \infty$
X. $h_b \pm m = c$	$= b$	$= \frac{b}{2}(\sqrt{2}\pm 1)$	$= \frac{b}{2}(\sqrt{3}\pm 1)$	$= \infty$

Unter den 13 Kurven 4. Ordnung, die als Hilfskurven auftreten, finden wir 6mal die Kreiskonchoide, 3mal die Konchoide des Nikomedes und 3mal die Kurve, die bei V (D gesucht) zum erstenmal auftaucht; siehe Tafel III, Fig. 10. Als Spezialfall für $c = 0$ erscheint 2mal die Strophoide, nämlich bei I und IV (D gesucht). Andere Spezialfälle für $c = 0$ sind strophoidenähnlich wie I und VIII (B gesucht). Für $c = 0$ zerfallen alle Kurven mit Ausnahme von I (B gesucht), welche für den Wert $c = \frac{b}{2}$ degeneriert. Beim Zerfallen treten Kreise auf ausser bei den Konchoiden noch bei V und I (B gesucht).

Im festen Eckpunkt O des Dreiecks besitzen alle Kurven einen mehrfachen Punkt mit Ausnahme von I_2 und V_7. Bei I_2 bewegt sich der mehrfache Punkt auf der Mittelsenkrechten, bei V_7 ist er konstant in A.

Als ein kleines Nebenresultat meiner Arbeit, die ich hiemit abbreche, betrachte ich das, dass es mir gelungen ist, für die zwei bekanntern Konchoiden neue Konstruktionsverfahren zu finden.

Es bleibt mir nur noch die angenehme Pflicht, meinen hochgeehrten Lehrern, den Herren Prof. Dr. Graf, Prof. Dr. Huber, dessen freundliche Ratschläge mir bei Fertigstellung dieser Arbeit sehr wertvoll gewesen, Prof. Dr. Forster, Prof. Dr. Moser und PD Dr. Gruner für das mir während meiner Studienzeit stets entgegengebrachte Wohlwollen den herzlichsten Dank auszusprechen.

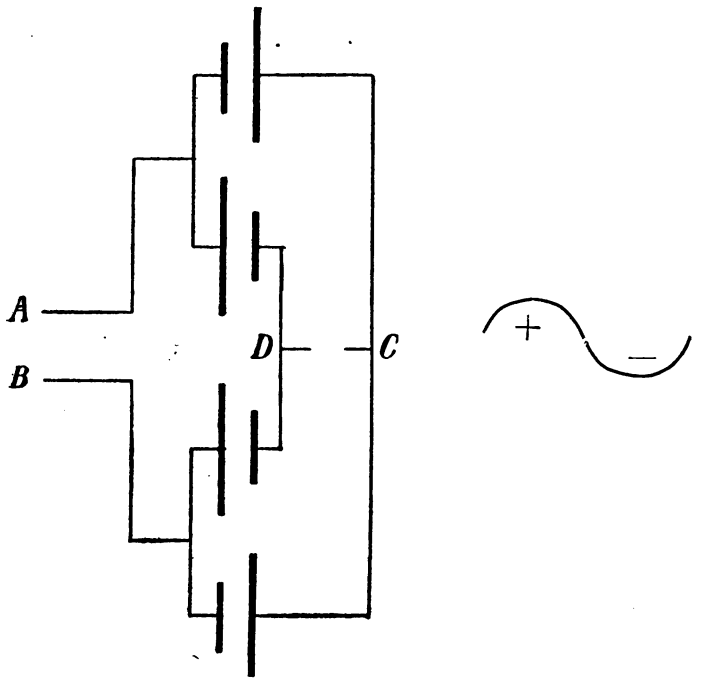
Dr. Emil König.

Beiträge zu dem Problem der elektrochemischen Umformung von Wechselstrom in Gleichstrom durch Aluminium-Elektrolytzellen.

Im Jahre 1897 hatte Grætz[1] [2] [3] ein Verfahren veröffentlicht auf elektrochemischem Wege vermittelst Aluminium-Kohle-Alaunzellen Wechselstrom in Gleichstrom umzuwandeln. Schon im Jahre 1895 hatte die Akkumulatorenfabrik Pollak[4] ein Patent auf ein ähnliches Verfahren genommen. Nachdem bereits Wöhler[5], Beetz,[6] [7] [8] [9] Buff,[10] Ducretet,[11] Oberbeck,[12] Streintz[13] [14] die unipolare Leitung des Aluminiums gekannt und zum Gegenstande ihrer Untersuchungen gemacht hatten, ist in neuerer Zeit durch die Arbeiten von Scott,[15] K. Norden,[16] Batorelli[17] bald die physikalische bald die chemische Seite der Aufgabe gefördert worden. Bei der praktischen Anwendung der Methode für Laboratoriumszwecke, stösst man auf einige auffallende Erscheinungen. Der Verfasser dieser Zeilen stellte sich Umformerbatterien von je 4 Zellen dar, in der Absicht, bei der Ladung einzelner Akkumulatorenzellen durch den mit Aluminiumzellen

[1] Etz. 1897, pag. 423.
[2] Wiedemann Annalen. 1897. Bd. 62, Seite 323.
[3] Zeitschrift für Elektrochemie. 1897, pag. 67 u. ff.
[4] Pollak, Etz. 1897 u. Compt. rend. 1897. Bd. 124, pag. 1443.
[5] Liebigs Annalen C. III. 1858. S. 218 ff.
[6] Pogg. Annalen. 1866. Bd. 127, S. 45.
[7] Wiedemann Annalen. Bd. 127. S. 56.
[8] » » » 156, S. 464.
[9] » » 1877. Bd. 2. S. 94.
[10] Lieb. Annalen. 1857. C. II, S. 269.
[11] Journal de Physique. 1875. S. 84.
[12] Wiedemann Annalen. 1883. Bd. 19, S. 625 ff.
[13] u. [14] Wiedemann Annalen. 1882. Bd. 17. Seite 841, 1887, Bd. 32, Seite 116, 1888, Bd. 34, S. 751.
[15] Wiedemann Annalen. 1899. Heft 2. Seite 406.
[16] Zeitschrift für Elektrochemie. 1899. No. 10 u. 11, pag. 159 u. 188.
[17] Il nuovo Cimenti. 1901. Ser. 5 t I, p. 112—133.

in Gleichstrom umgeformten Wechselstrom niedriger Spannung die grossen Verluste zu reduzieren, die bei der Ladung mit Gleichstrom von 120 Volt aus dem städtischen Netz sich ergeben. Anlässlich des Vortrages von Herrn Prof. Grætz an der IV. Hauptversammlung der deutschen elektrochemischen Gesellschaft vom 22.—26. Juni 1897 in München war in der Diskussion von Dr. Correns[1]) zwar die Ansicht geäussert worden, es lassen sich mit pulsierendem Gleichstrom dieser Art, dessen Ordinaten zwischen Null und Maximum schwanken, schwer Akkumulatoren laden. Dieser Ansicht war Ing. Liebenow entgegengetreten mit Hinweis auf seine Versuche, die den Beweis liefern, dass es für den Akkumulator gleichgültig sei, ob der Strom in zahlreichen Stössen eintrete oder nicht. Diese letztere Ansicht scheint eine Bestätigung zu finden durch das Verhalten der Akkumulatorenbatterie in der Tonhalle in Zürich, welche bekanntlich mit undulierendem Gleichstrom, erzeugt aus Wechselstrom durch rotierende Pollak'sche Gleichrichter[2]) geladen wird, indem über Wirkungs-



[1]) Zeitschrift für Elektrochemie 1897, pag. 70.
[2]) Etz. 1898, pag. 80.

grad und Lebensdauer derselben, soweit es dem Verfasser bekannt ist, nichts ungünstiges bekannt geworden ist.

Die Zellen der Versuchsbatterie wurden in der von Grætz angegebenen Weise zur Ausnutzung und Parallelschaltung beider Stromimpulse einer Periode geschaltet nach folgendem Schéma:

Die langen Striche bedeuten Aluminium, die kurzen Blei. Da nach Grætz eine Al.-Pb.-Zelle bis zu Spannungen von ca. 22 Volt, wenn Al. Anode ist «keinen durch einen Galvanometer nachweisbaren Strom», durchlässt, so sollte man, wenn bei A und B Wechselstrom ⌒⌣ eingeführt wird bei C und D pulsierenden Gleichstrom ⌒⌒ von gleicher Stromstärke erwarten, beziehungsweise bei offenem Gleichstromkreise in den Wechselstromzuleitungen keinen direkten Leitungsstrom finden, sondern höchstens einen dielektrischen Verschiebungsstrom, der schwach sein müsste, da die Periodenzahl 40 betrug und ein Aluminiumkondensator sich vor andern elektrolytischen Kondensatoren nur durch besonders hohen Durchschlagswiderstand, aber nicht durch eine Kapazität von anormaler Grössenordnung auszeichnet. Schon bei den ersten Versuchen dieser Art indess beobachtete Verfasser, selbst bei Spannungen erheblich unter 20 Volt, beträchtliche Wechselstromstärken bei offenem Gleichstromkreis, die auch bei andauernder vorheriger Formierung der Al.-Platten in einem Gleichstrom und bei Dauereinschaltung im Wechselstrom nicht bedeutend zurückgingen. Um zunächst festzustellen, ob der Reinheitsgrad des Aluminiums einen bestimmenden Einfluss auf die Intensität des durchgehenden Stromes ausübe, wurde eine Versuchszelle aus einer Anoden-Platte aus chemisch reinem Aluminium (von Merck in Darmstadt) und 2 parallel geschalteten Platinkathoden geprüft auf durchgehenden Gleichstrom bei verschiedenen Spannungen. Die Dimensionen der Zelle waren: Wirksame Platinoberfläche ca. 2.5 dm^2; wirksame Aluminiumoberfläche ca. 2 dm^2; Elektrolyt: Chemisch reine Alaunlösung, bei Zimmertemperatur gesättigt.

Platinkathode. Klemmenspannung.	Die Zelle durchfliessender Strom in A.
2 Volt	0,00002 Amp.
4 »	0,0001 Amp. abnehmend bis 0,00006
6 »	0,00015
8 »	0,0004
10 »	0,0018 abnehm. bis 0,0016 bis 0,0009

Die niedrigeren Stromwerte wurden mit Hülfe eines nach Amper justierten Edelmann'schen Spiegelgalvanometers mit Fernrohr bestimmt, die höhern vermittelst eines Galvanometers von Hartmann & Braun, mit Permanentmagneten und beweglicher Spule (System Deprez-d'Arsonval) unter Verwendung passender Nebenschlüsse.

Die in der Tabelle angeführten Zahlen geben die Minimalwerte bei andauernder Einschaltung an. Lässt man die Zelle nämlich eine Zeit lang stehen, so beobachtet man beim Einschalten im ersten Augenblick einen Stromstoss, der das zehn- bis mehrhundertfache des oben angeführten Wertes erreichen kann. Schon nach einem kleinen Bruchteile einer Sekunde aber geht der Strom beinahe auf den Minimalwert zurück, den er nach einigen Minuten erreicht.

Es ist daher angezeigt und notwendig, empfindliche Instrumente im Augenblick des Einschaltens zuerst kurz zu schliessen. Es macht ganz den Eindruck, wie wenn nach längerem Stehen die diektrische Schicht von Aluminiumoxyd ganz verschwunden wäre und der eintretende Strom zuerst eine kleine Zeit brauche, sie wieder zu erzeugen. Es sei ferner bemerkt, dass der erwähnte Stromstoss nicht eintritt, wenn man von einer Stufe höherer Spannung zur nächst niederen Stufe übergeht, während man dann gleichzeitig kleinere Werte für den durchgehenden Strom findet, als im umgekehrten Fall, wie überhaupt diese Zahlwerte sehr variabel sind, abhängig von dem momentanen Zustand der Zelle, im Zusammenhang mit der ausserordentlich veränderlichen Anodenpolarisation des Aluminiums, über welche schon Streintz und andere Forscher klagten.

Die folgende Tabelle gibt die Resultate der Messungen der auftretenden Klemmenspannungen (Aluminium-Anode) beim Durchleiten von Strömen geringer Intensität. Die Klemmspannungen wurden gemessen mit Spiegelgalvanometer (2000 Ohm Spulenwiderstand, ca. 957,000 Ohm Vorschaltwiderstand). Von einer Bestimmung der auftretenden Anoden- und Kathodenpolarisation wurde Umgang genommen, da Messresultate[1]) über innern Widerstand und Polarisation in ihrer Abhängigkeit von der durchgehenden Stromstärke bereits vorlagen.

[1]) Batorelli. Il nuovo Cimenti, 1901 ser. 5 t. I pag. 112—133.

Spannung der Stromquelle.	Vorschaltwiderstand.	Stromstärke gemessen.	Klemmenspannung gemessen.
ca. 125 Volt	60000 Ohm	0,00172 Amp.	18,84 Volt
	50000 „	0,00210 „	19,2 „
	40000 „	0,00265 „	20,04 „
	30000 „	0,00343 „	20,64 „
	20000 „	0,005 „	22,2 bis 20,4
	10000 „	0,01 „	22,2 „ 24
	2500 „	0,039 „	26 „
	1250 „	0,075 „	30 „
		0,25 „	42 Anfangs bis 38 am Ende
		0,6 „	42 „ „ 36 „ „
		0,9 „	38 „
		1,15 „	37 „
		1,28 „	37,5 „
		1,5 „	38 „
		1,8 „	39 „
		2 „	40 „
		2,35 „	41,5 „
		2,5 „	43 Anfangs; zurück auf 40
		11 „	45 „ „ „ 40
Zelle 38° warm		7 „	34 „
		5 „	32 „
		3,8 „	29 „
		2,05 „	28 „
		1,7 „	27,5 „
		1 „	27 „
		0,7 „	26,8 „
		0,3 „	26,8–27,5

Stromrichtung geändert Klemmenspannung.	Aluminium ist Kathode Stromstärke.
3,6 Volt	0,4 Amp.
3,9 „	0,9 „
4,4 „	2,0 „
5,7 „	5,0 „
6,1 „	6,0 „
6,9 „	8,0 „
7,7 „	9,6 „

Wird nunmehr der Strom gewendet, so steigt der Zeiger des Voltmeters langsam (während $^3/_4$ Minuten) bis zum Wert von

28 Volt bei 0,3 Amp.
32 „ „ 2,0 „

Die Zelle ruht während 24 Stunden; beim Einschalten eines Stromes von 0,25 Amp. steigt der Zeiger des die Klemmspannung

messenden Voltmeters während 2 Minuten, von Null mit gleichmässiger Geschwindigkeit auf den Anfangswert von 42 Volt, sinkt während 4 Minuten auf 37 Volt, um jetzt konstant zu bleiben (Stromverbrauch des Deprez-Voltmeters bei Endanschlag der Skala 0,00274 Amp.).

Nachdem es sich so gezeigt hatte, dass auch bei Verwendung von reinen Materialien, selbst bei Gleichstromspannungen von erheblich unter 22 Volt stets ein, wenn auch schwacher, Stromdurchgang stattfindet (vergleiche die Anschauung von Scott[1]), wonach sich die Aluminiumzelle „wie ein Condensator mit einem verhältnissmässig grossen Widerstand parallel geschaltet und einem sehr kleinen Widerstand [des Elektrolyten] dahinter geschaltet" verhält), wurde zur Untersuchung zweier grösserer untereinander gleicher Zellen geschritten. Die 2 Zellen enthielten je 4 blanke Grossoberflächen-Bleiplatten (von der Akkumulatoren-Fabrik Oerlikon); je 5 Aluminiumplatten von 1 mm Dicke (von den Neuhausener Aluminiumwerken, 98—99% Aluminium enthaltend) mit je ca. 30 l. kalt gesättigter Alaunlösung. Wirksame Aluminiumoberfläche pro Zelle 48 dm^2; wirksame Bleioberfläche je ca. 45 dm^2. Mittlerer Abstand der Aluminium- und Pb. Platten ca. 1 cm. Diese 2 Zellen wurden nun hintereinander geschaltet und mit Gleichstrom formiert. Bei 0,4 Amp. Stromdurchgang (Al.-Anode) war, nach Ablauf von 4 Stunden die Klemmenspannung erst auf 10 Volt gestiegen; bei Verstärkung des Stroms auf 2 Amp. stieg sie im Verlaufe von 10 weiteren Minuten auf 63 Volt, um hier bei dieser Stromstärke konstant zu bleiben. Unmittelbar nachher wurden die bei nachstehend angegeben Klemmspannungen durchgehenden Stromstärken ermittelt:

Klemmenspannung	Die Zellen durchfliessende Stromstärke in Amp
2 Volt	0,000205 Amp.
4 „	0,00055 „
6 „	0,00136 „
8 „	0,00216 „
10 „	0,003 „
12 „	0,007 „
14 „	0,011 bis 0,008 abnehmend

[1]) Wiedemann Annalen, 1899. S. 406.

Klemmenspannung	Die Zellen durchfliessende Stromstärke in Amp.
16 Volt	0,012 Amp. bis 0,009 abnehmend
20 „	0,015 „ „ 0,012 „
22 „	0,012 „
24 „	0,018 „ „ 0,016 „
26 „	0,020 „ „ 0,018 „
29 „	0,024 „ „ 0,022 „
31 „	0,028 „
38 „	0,045 „ „ 0,038
41 „	0,060 „ „ 0,055
45 „	0,085 „
48 „	0,105 „
56 „	0,23 „
60 „	0,32 „
61 „	0,5 „
64 „	0,6 „
65 „	0,8 „
65,2 „	1,0 „

Wie sehr die obigen Angaben für die Stromwerte abhängig sind von dem jeweiligen Zustand der Batterie zeigt das Verhalten derselben nach zweitägiger Ruhe.

2 Volt	nach	½	Minuten	0,02	Amp.
„	„	2	„	0,012	„
4 „	„	½	„	0,03 bis 0,04	Amp.
„	„	2	„	0,018	Amp.
6 „	„	2	„	0,025	„
„	„	5	„	0,018	„
8 Volt	unmittelbar nach Einschalten			0,4	„
	nach	2	Minuten	0,028	„
10 „	„	1	„	0,035	„
12 „	„	1	„	0,040	„
14 „	„	1	„	0,060	„
„	„	2	„	0,040	„
16 „	„	1	„	0,080	„
„	„	2	„	0,050	„
„	„	5	„	0,040	„
18 „	„	1	„	0,080	„
„	„	3	„	0,050	„
20 „	„	1	„	0,080	„

Nunmehr wurde durch die Batterie ein starker Strom gesandt:

Stromstärke		Klemmenspannnng			
2	Amp.	nach	2,5	Minuten 60	Volt
„	„	„	4	„ 62,5	„
„	„	„	15	„ 70	„
„	„	„	30	„ 72	„
„	„	„	45	„ 72	„
„	„	„	2	„ 82	„
„	„	„	5	„ 81	„
10	„			91	„

Unmittelbar darauf ergaben sich wieder folgende Werte für die durchgehenden Ströme bei variierter Klemmenspannung:

Klemmenspannung	Stromstärke in Amp.
2 Volt	0,00022 Amp.
4 „	0,00060 „
6 „	0,00097 „
8 „	0,00164 „
10 „	0,00218 „
12 „	0,0027 „
14 „	0,003 „
16 „	0,0055 „
18 „	0,007 „
20 „	0,009 bis 0,008 Amp.
23 „	0,009 „
27 „	0,016 „
30 „	0,02 „
37 „	0,035 „
42 „	0,055 „
47 „	0,075 „
50 „	0,110 „
60 „	0,22 „
65 „	0,30 „
74 „	0,70 „
75 „	0,80 „

Bezüglich des im Moment des Einschaltens erfolgenden Stromstosses sei auf das früher gesagte verwiesen.

Leitet man nun durch 2 solche hintereinander geschaltete Zellen Wechselstrom, dessen Spannung 2×22 Volt nicht übersteigt, so soll nach Grætz, indem jeweilen diejenige Hälfte einer Periode, für welche Aluminium Anode ist, ausfällt, ein intermittierender und pulsierender Gleichstrom entstehen, dessen Stromstärke die Hälfte beträgt von derjenigen des Wechselstroms (ohne Drosselwirkung). Zur Erzeugung der verschiedenen Spannungsabstufungen diente ein 3 K. W. Transformator (von Brovn und Boveri in Baden), der in entsprechender Weise konstruiert, die verschiedensten Sekundärspannungen abzunehmen gestattete, ohne Spulenvertauschung.

Die hauptsächlichsten Daten des Transformators sind:

Primäre Spannung: 240 Volt.

Periodenzahl . . 40

Primärdraht in 2 Abteilungen à je 154 Windungen.

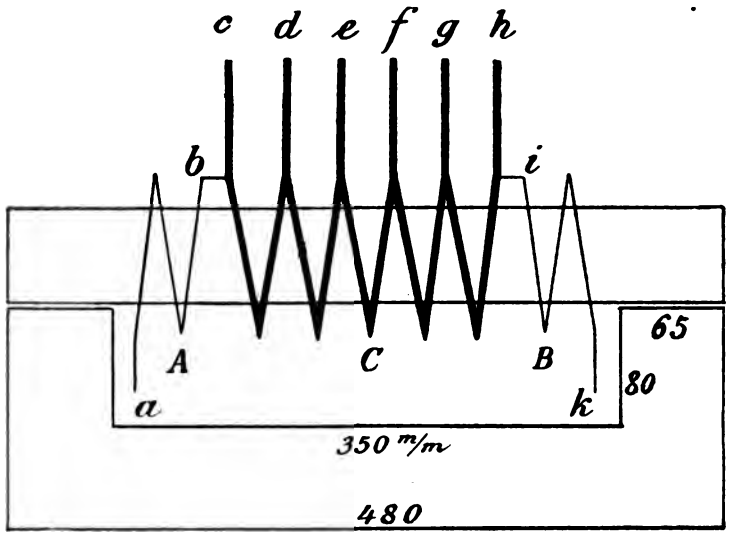
Sekundärdraht: 85 Windungen in 5 gleichen Abteilungen à je 17 Windungen.

Stärke des Primärdrahtes:	$3{,}5^m/_m$ nackt	=	$9{,}62^m/_{m^2}$
„ „ Sekundärdrahtes:	$6{,}5^m/_m \times 6{,}5^m/_m$	=	$42{,}25^m/_{m^2}$
Widerstand des Primärdrahtes	$2 \times 0{,}12$	=	0,24 Ohm
„ der Sekundärspule		=	0,015 „
Länge des Primärdrahtes		=	66,3 m
„ „ Sekundärdrahtes		=	36,48 m.
Mittlere Länge einer primären Windung		=	43 cm.
„ „ „ sekundären „		=	43 „
l_m = Mittlerer Kraftlinienlänge		=	114 „
Eisenvolumen $\frac{39000}{7{,}8}$		=	5000 $cm.^3$
Wirksamer Eisenquerschnitt		=	45 $cm.^2$

Schaltung I.

Das Kupfer der Sekundärwickelung wird mit zur primären Stromleitung benutzt.

Eisengestell 1 : 5.



68.

Primär: 393 Windungen; 240 Volt; 40∼; 1 Windung = 0,61 Volt.

Sekundär abnehmbare Spannungen:

Zwischen	c und d	17	Windungen	=	10,4	Volt
„	c und e	34	„	=	20,7	„
„	c und f	51	„	=	31,1	„
„	c und g	68	„	=	41,5	„
„	c und h	85	„	=	51,8	„
„	a und c	154	„	=	93,9	„
„	a und d	171	„	=	104,3	„
„	a und e	188	„	=	114,7	„
„	a und f	205	„	=	125,1	„
„	a und g	222	„	=	135,5	„
„	a und h	239	„	=	145,9	„
„	a und k	393	„	=	240,0	„

Die Prüfung auf Wirkungsgrad und Spannungsabfall bei induktionsfreier Belastung ergab folgendes Resultat:

Anzapfung	Volt primär	Volt sekundär leer	Volt sekundär belastet	Amp. primär	Amp. secundär	Wirkungsgrad
c—h	240	53,0	47,5	13,4	60	88,6%
c—g	„	42,0	39,0	10,8	„	90,3%
c—f	„	31,0	29,0	8,3	„	87,8%
c—e	„	21,0	20,0	5,7	„	87,7%
c—d	„	11,5	10,5	3,3	„	79,5%

Aus den angegebenen Daten berechnen sich:

Maximale Induktion $\mathfrak{B}_{max} = \dfrac{0{,}9.\ 240.\ 10^8}{4.\ 40.\ 393.\ 45} = 7634$ Kraftlinien per cm²

Maximale Kraftlinienzahl $= 7634 \times 45 = 343500.$

Eisenverluste: $W = W_{hyst} + W_{fouc} = 79{,}8 + 21{,}5 = 101{,}3$ Watt

a) Hysteresis: $W_{hyst} = \alpha\, \mathfrak{B}^{1{,}6} \sim \text{Vol.}\ 10^{-7}$

$= 0{,}00245.\ 7634^{1{,}6}\ 40.\ 10^{-7}\ 5000$

$= 79{,}8$ Watt.

b) Wirbelsströme: $W_{fouc} = \left(\dfrac{0{,}5.\ 40.\ 7634}{2{,}5.\ 10^6}\right)^2 .\ 5000$

$= 21{,}5$ Watt.

Eisenverluste: berechnet: 101,3 Watt

gemessen: 80,0 „

Wattkomponente des Leerstroms $= \dfrac{101{,}3}{240} = 0{,}42$ Amp. berechnet

$= \dfrac{80}{240} = 0{,}33$ „ gemessen

Wattloser Erregerstrom = für $\mathfrak{B} = 7634$ $\mu = 2000$

$= \dfrac{0{,}8}{\sqrt{2}} \cdot \dfrac{\mathfrak{B}_{max}\ l_m}{\mu.\ 393}$

$= \dfrac{0{,}8.\ 7634.\ 114}{\sqrt{2}.\ 2000.\ 393}$

$= 0{,}63$ Amp. (berechnet).

Leerstrom $= \sqrt{0{,}42^2 + 0{,}63^2} = 0{,}76$ Amp. berechnet

$= 0{,}75$ „ gemessen

$\cos \varphi = \dfrac{80}{180} = 0{,}44$

$\varphi = 63$

Schaltung II.

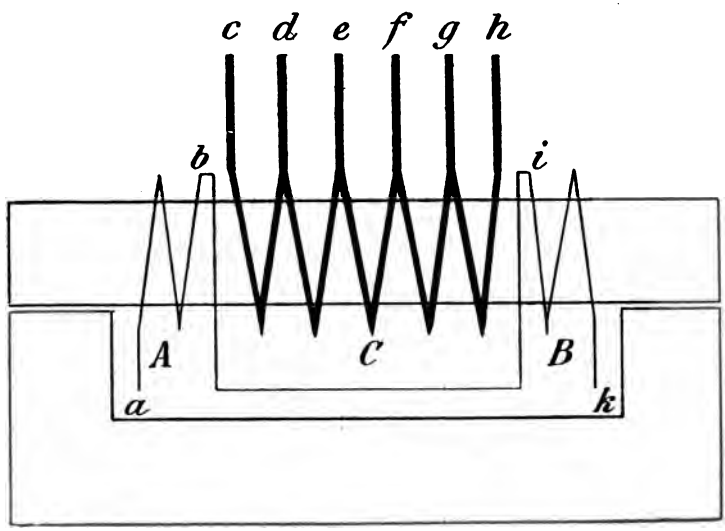
Gleich wie Schaltung I; nur wird das Ende der Primärspule A successive an die Anzapfungen d, e, f, g gelegt.
Ende von A mit d verbunden; 376 prim. Wind;
1 Wind. = 0,64 Volt; zwischen d u. h = 68 Wind = 43,5 Volt
Ende von A mit e verbunden; 359 prim. Wind;
1 Wind. = 0,67 Volt; zwischen e u. h = 51 Wind = 34,1 Volt
Ende von A mit f verbunden; 342 prim. Wind;
1 Wind. = 0,70 Volt; zwischen f u. h = 34 Wind = 23,8 Volt
Ende von A mit g verbunden; 325 prim. Wind;
1 Wind. = 0,74 Volt; zwischen g u h = 17 Wind = 12,5 Volt

Wirkungsgrad und Spannungsabfall bei diesen Schaltungen und bei induktionsfreier Belastung nehmen folgende Werte an:

Anzapfungen	Volt primär leer	Volt primär belastet	Volt sekundär leer	Volt sekundär belastet	Amp. primär	Amp. sekundär	Wirkungsgrad
d — h	240		43,5	40,0	11,5	60	86,9%
e — h	„		34,0	32,3	9,0	„	89,7%
f — h	„		24,0	23,0	6,8	„	84,6%
g — h	„		12,5	12,0	3,8	„	78,9%

Schaltung III.

Sekundärspule und Primärspule sind elektrisch ganz getrennt.



Primär 308 Windungen: 240 Volt; 1 Windung = 0,78 Volt.

Induktion: 9742 Kraftlinien per cm²; Gesammtkraftlinienzahl: 438390.

Leerstrom gemessen = 1,45 Amp.
Eisenverluste gemessen = 125 Watt

$$\text{Wattkomponente} = \frac{125}{240} = 0{,}52 \text{ Amp.}$$

$$\text{Wattlose Komponente} = \sqrt{1{,}45^2 - 0{,}52^2} = 1{,}35 \text{ Amp.}$$

$$\cos \varphi = 0{,}36$$

$$\varphi = 68^0$$

Magnetischer Widerstand:

$$\text{a)} \quad w = \frac{0{,}4.\ 3{,}14.\ 308.\ 1{,}35\ \sqrt{2}}{438390} = 0{,}0016$$

$$\text{b)} \quad w = \frac{114}{45.\ 2000} = 0{,}0013$$

Sekundär abnehmbare Spannungen:

Zwischen	c und d	17	Windungen	= 13,3	Volt
„	c und e	34	„	= 26,5	„
„	c und f	51	„	= 39,8	„
„	c und g	68	„	= 53,0	„
„	c und h	85	„	= 66,3	„
„	a und b	154	„	= 120	„

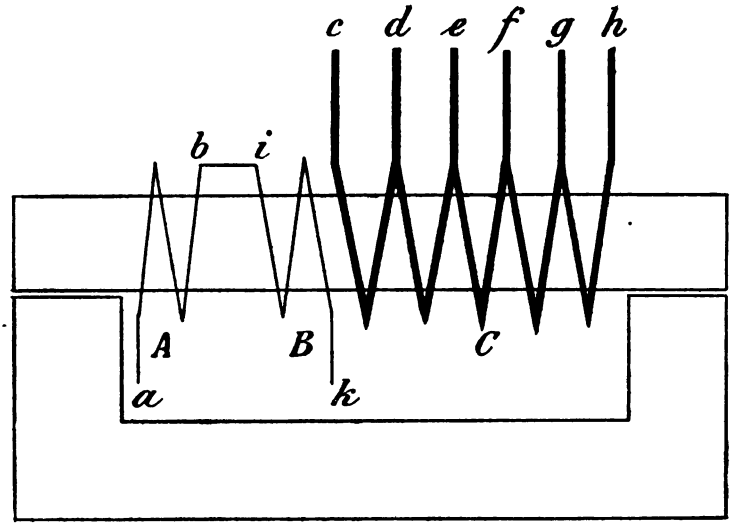
Wirkungsgrad und Spannungsabfall:

Anzapfung	Volt primär	Volt sekundär leer	Volt sekundär belastet	Amp. primär	Amp. sekundär	Wirkungsgrad
c—h	240	65,5	57,0	17,3	60	82,4%
d—h	„	53,0	47,3	13,7	„	86,3%
e—h	„	40,0	37,0	10,3	„	89,8%
f—h	„	26,0	24,5	7,8	„	83,9%
g—h	„	13,0	12,5	4,2	„	74,4%

Nachtrag: Wird die Zahl der primären Erregerwindungen durch Verbindung von A mit den entsprechenden Anzapfungen von C (mit Weglassung von B und Entnahme des Sekundärstromes an C) noch mehr herabgesetzt, so wachsen mit steigender Induktion, Leerstrom, Eisenverluste und Spannungsabfall rasch an:

Erregerwind.	Induktion	Eisenverlust Watt	Kupferverlust Watt	Gesamtverlust Watt	Leerstrom Amp.	scheinbare Watt	cos φ	φ
A+B+C: 393	7634	80	0,14	80	0,75	180	0,44	63°
A+B : 308	9742	124,5	0,5	125	1,45	348	0,36	68°
A+C : 154+85	12552	223,3	1,75	225	3,6	864	0,26	74°
„ : 154+68	13520	272	3,0	275	4,8	1152	0,24	76°
„ : 154+51	14634	344	6,4	350	7,0	1680	0,21	78°
„ : 154+34	15957	459	15,8	475	11,2	2688	0,18	80°

Schaltung IV.



Die Sekundärspule wird neben die beiden Hälften der Primärspule gelegt, statt zwischen dieselben.

Bei unbelasteter Sekundärspule gilt das für Schaltung III gesagte. Bei Belastung wird indessen die Kraftlinienstreuung der Spulenanordnung entsprechend sehr gross; der Sehundärspule kann die normale Leistung von 3 KW. überhaupt nicht mehr entnommen werden, ihre maximale Leistung bei 240 Volt primär beträgt noch 1200 Watt. Die Phasenverschiebung zwischen Strom und Spannung in der Primärspule bleibt dauernd eine grosse. Es seien in folgendem einige Werte über Spannungsabfall u. s. w. für den Fall nahezu induktionsfreier Belastung angegeben:

Es sollen bedeuten:

Primäre Spannung = V_1
„ Stromstärke = A_1
„ scheinbare Watt = $W_{1,s}$
„ wirkliche „ = $W_{1,w}$

Phasenverschiebung zwischen primärem Strom und primärer Spannung = φ_1

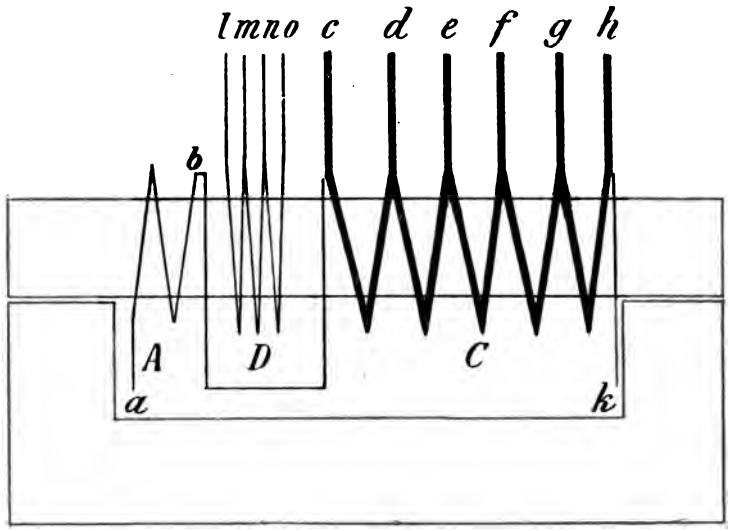
Leitungsfaktor = $\cos \varphi_1$

Sekundäre Spannung = V_2
„ Stromstärke = A_2 Wirkungsgrad = N
„ Watt = W_{2w}

V_1	A_1	W_{1s}	W_{1w}	$\cos \varphi_1$	φ_1	V_2	A_2	W_{w2}	N	Spannungsabfall	
240	1,45	348	125	0,36	68	61	0	0	0		
230	2,8	640	475	0,74	42°	59	5,8	335	71%	3%	
230	3,1	713	550	0,77	40	57	7,0	385	70%	7%	
235	3,7	880	700	0,80	37°	57	9,0	490	70%	7%	
230	4,8	1104	900	0,82	35°	56	14,0	720	80%	8%	
230	5,9	1357	1060	0,78	39°	53	17,0	860	81%	13%	
230	7,7	1771	1338	0,76	41°	49	22,5	1060	79%	20%	
230	8,7	2001	1450	0,72	44°	45	28	1180	80%	26%	
230	9,2	2116	1425	0,67	47°	43	30	1200	84%	29%	**Maximum**
226	11,9	2689	1375	0,51	59°	28	40	1030	75%	54%	
230	13,0	2990	1237	0,41	66°	23	45	970	78%	62%	
230	13,3	3059	1000	0,33	71°	16,5	47	750	75%	73%	
230	13,5	3105	920	0,30	73°	13	48	615	77%	79%	
230	13,5	3105	820	0,26	75°	11	49	525	64%	82%	
230	14,0	3220	637	0,20	79°	6,5	50	315	49%	89%	
230	14,2	3266	412	0,13	83°	2	51	92	22%	97%	
230	14,5	3335	318	0,095	85°	—	52	—	—	—	

Wie man sieht reicht die primäre Spannung von 240 Volt zur Erzeugung des normalen Stromes von 60 A bei Kurzschluss in der Sekundärspule nicht einmal aus.

Schaltung V.



Die zweite Hälfte der Primärspule wird herausgenommen (die Weglassung derselben ist notwendig wegen Platzmangel) mit C in Serie geschaltet und bei a u. k an die Spannung von 240 Volt gelegt. Zwischen A u. C wird eine Hochspannungsspule D eingeschoben. Dieselbe besteht aus 3 durch 1 cm dicke Scheidewände getrennten Abteilungen. Die Daten dieser selbstgefertigten Spule sind:

Drahtstärke: $0.7\,^{m}/_{m} = 0.385\,^{m}/_{m^2}$

Windungszahl der ersten Abteilung: 622 (l m); Widerstand der ersten Abteilung: 13.6 Ohm.

Windungszahl der zweiten Abteilung: 584 (m n); Widerstand der zweiten Abteilung: 12.0 Ohm.

Windungszahl der dritten Abteilung: 561 (n o); Widerstand der dritten Abteilung: 9.3 Ohm.

Gesamtwindungszahl: 1767; Gesamtwiderstand: 34.9 Ohm.
Gesamtdrahtlänge: 772 m.
Mittlere Länge einer Windung: 43.7 cm.

Es ergibt sich mithin:

Primäre Windungszahl: $154 + 85 = 239$; 1 Windung $= \frac{240}{239} = 1$ Volt

Maximale Induktion:

$$\mathfrak{B}_{max} = \frac{0{,}9 \cdot 240 \cdot 10^8}{4 \cdot 40 \cdot 239 \cdot 45} = 12552$$

Maximale Kraftlinienzahl = 564840

Eisenverluste:

a) Hysteresis $W_{hyst} = \alpha \cdot \mathfrak{B}^{1.6} \sim$ Vol. 10^{-7}

$= 0 \cdot 00245 \cdot 12552^{1.6} \cdot 40 \cdot 10^{-7} \cdot 5000$

$= 177 \cdot 1$ Watt

b) Wirbelströme: $W_{fouc} = \left(\frac{0.5 \cdot 40 \cdot 12552}{2{,}5 \cdot 10^6}\right)^2 \cdot 5000$

$= 50 \cdot 4$ Watt

Gesamtverlust in Eisen: $177.1 + 50.4 = 227.5$ berechnet

$= 225.0$ gemessen

Wattcomponente des Leerstromes $= \frac{225}{240} = 0.938$ Amp. gemessen

» » » $= \frac{227.5}{240} = 0.948$ » berechnet

Wattloser Erregerstrom:

für $\mathfrak{B} = 12552$ $\mu = 1000$

$$= \frac{0.8}{\sqrt{2}} \cdot \frac{\mathfrak{B} \cdot 1\,m}{\mu \cdot 239} = \frac{0{,}8 \cdot 12552 \cdot 114}{\sqrt{2} \cdot 1000 \cdot 239} = 3.3 \text{ Amp.}$$

Leerstrom $= \sqrt{3.3^2 + 0{,}94^2} = 3.4$ Amp. berechnet

$= 3.6$ » gemessen

$$\cos \varphi = \frac{225}{864} = 0.26$$

$$\varphi = 74^0$$

Sekundär abnehmbare Spannungen:

Zwischen:	c u. d	17	Windungen	=	17	Volt
» :	c u. e	34	»	=	34	»
» :	c u. f	51	»	=	51	»
» :	c u. g	68	»	=	68	»
» :	c u. h	85	»	=	85	»
» :	a u. c	154	»	=	154	»
» :	l u. m	622	»	=	622	»
» :	m u. n	584	»	=	584	»
» :	n u. o	561	»	=	561	»
» :	l u. o	1767	»	=	1767	»

Die Prüfung auf Wirkungsgrad und Spannungsabfall ergab folgendes Resultat:

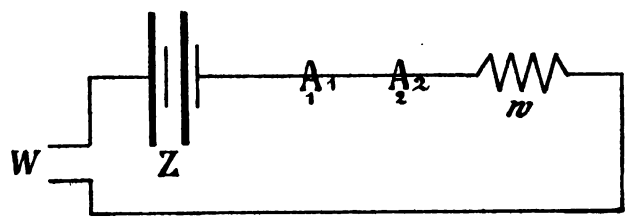
V_1	A_1	W_{1s}	W_{1w}	$\cos\varphi_1$	φ_1	V_2	A_2	W_{w2}	η	Spannungsabfall %
240	3.6	864	225	0.26	74°	83	0	0	0%	—
238	9.0	2142	1775	0.83	34°	80	20	1525	86%	4%
236	12.4	2926	2525	0.86	30°	78	30	2175	86%	6%
230	16.0	3680	3075	0.84	33°	71	40	2737	89%	14%
226	19.5	4407	3475	0.79	38°	67	50	3275	94%	19%
240	3.6	864	225	0.26	74°	66	0	0	0%	—
240	7.7	1848	1500	0.81	36°	64	20	1200	80%	3%
240	10.6	2544	2050	0.81	36°	62	30	1760	86%	6%
240	12.8	3072	2612	0.85	32°	60	40	2260	86%	9%
236	15.5	3658	3075	0.84	33°	57	50	2701	88%	14%
232	19.0	4408	3575	0.81	36°	55	60	3200	90%	17%
240	3.6	864	225	0.26	74°	50.5	0	0	0%	—
240	6.5	1560	1162	0.75	42°	49	20	950	82%	3%
240	8.3	1992	1637	0.82	35°	48	30	1375	84%	5%
238	10.2	2428	2050	0.84	32°	47	40	1775	86%	7%
236	12.4	2936	2487	0.85	32°	45	50	2150	87%	11%
230	14.7	3381	2750	0.81	36°	43	60	2450	89%	15%
228	16.8	3830	3175	0.83	34°	41.5	70	2805	90%	18%
240	3.6	864	225	0.26	74°	33.5	0	0	0%	—
238	6.2	1476	1169	0.79	38°	32	30	915	79%	5%
234	7.6	1778	1450	0.82	35°	31.5	40	1175	81%	6%
238	9.0	2142	1750	0.82	35°	31	50	1450	83%	8%
236	10.4	2454	2050	0.84	33°	30.5	60	1730	85%	9%
236	11.5	2714	2300	0.85	32°	30	70	1990	87%	10%
230	12.8	2944	2550	0.87	30°	29	80	2220	88%	13%
230	16.0	3680	3075	0.84	33°	27	100	2620	85%	19%
240	3.6	864	225	0.26	74°	16.8	0	0	0%	—
234	5.1	1193	888	0.74	42°	16.5	40	606	68%	2%
236	5.9	1392	1062	0.76	40°	16	50	750	71%	5%
240	6.5	1560	1187	0.76	40°	16	60	918	77%	5%
236	7.6	1794	1462	0.82	35°	15	80	1148	79%	11%
240	9.0	2160	1750	0.81	36°	14.5	100	1400	80%	14%

Die Spannung der Spule D wurde mit einem Multicellularvoltmeter (von White in Glasgow) nach Lord Kelvin zu 1773 Volt gemessen (1767 berechnet). Spannungsabfall und Wirkungsgrad waren hier analog denjenigen in der Niederspannungsspule. Bei voller Belastung (ca. 1600 Volt und 2 Amp.) ist die Beanspruchung des Drahtes für ununterbrochenen Betrieb eine hohe (cā. 5 Amp. pro $1^m/_{m^2}$), bei intermittierendem Betriebe ist sie jedoch erfahrungsgemäss vollkommen zulässig. Die Schaltung V ist somit sehr zweckmässig. Der Spannungsabfall von maximal 19% fällt nicht in Betracht gegenüber der Vielseitigkeit der Benutzung des Transformators, indem Hochspannung und Niederspannung gleichzeitig, in vielen Abstufungen entnommen werden können. Es sei zum Schlusse noch erwähnt. dass die zu Erzeugung des sekundären Kurzschlussstromes von 60 A (bei 85 Windungen), notwendige primäre Spannung 140 Volt beträgt, woraus sich in bekannter Weise der bei verschiedenen Belastungen eintretende Spannungsabfall auch graphisch ermitteln liesse.

Bei diesem Anlass sei noch bemerkt, dass bei obigem Transformator die Erscheinung eines Stromstosses beim Einschalten manchmal sehr auffällig beobachtet wurde. Diese Erscheinung ist bekanntlich unabhängig von der Belastung, tritt im magnetisierenden Stromkreis ein ohne zu dem andern durchzudringen; der Stromstoss erzeugt keine entsprechende Welle magnetischer Kraft, eine Lampe im Sekundärkreis leuchtet immer gleich hell, ob der Stoss primär eintritt oder nicht. Die Erscheinung erklärt sich aus dem remanenten Magnetismus. Massgebend für das Auftreten des Vorganges ist der Zustand in welchem das Eisen hinterlassen wurde. War das Eisen vollkommen unmagnetisch, so erzeugt schon der erste schwache Strom die erforderliche gegenelectromotorische Kraft. Muss dagegen der eintretende Strom bestehenden Magnetismus zuerst umkehren, so kann ein starker Stromstoss erfolgen (vgl. Feldmann, Transformatoren). In den Primärkreis des Transformators wurde eine Glühlampe (von 20 Volt und 0,8 Amp.) eingeschaltet, welche durch den Leerstrom (0,75 Amp.) zum beinahe normalen Glühen kam. Wurde nun mit einem besonders rasch wirkenden Ausschalter in schneller Folge der Strom geöffnet und geschlossen, so leuchtete die Lampe häufig

plötzlich in so greller Weissglut, dass sie nach wenigen Minuten ganz geschwärzt war. Ein an Stelle der Glühlampe eingeschalteter Hitzdrahtampermeter (0 bis 2.5 Amp.) erwies sich als zu träg, um den sehr kurz dauernden Strom anzuzeigen, doch deutete die aussergewöhnliche Schnelligkeit der Zeigerbewegung beim Ausschlag auf 1.5 bis 1.9 Amp., an, dass der wirkliche Strom viel grösser war. Viel schneller aber reagierte ein auf 20 Amp. eingestellter sehr präzis wirkender automatischer Doppelausschalter von Hartmann und Braun, der beim plötzlichen Einschalten des unbelasteten Transformators einige Male herausfiel, wenn auch allerdings selten mit Rücksicht auf die grosse Zahl diesbezüglicher Versuche. Ziemlich regelmässig aber fiel der Automat (20 Amp.) heraus beim raschen Einschalten bei höherer Induktion (12552 Kraftlinien pro cm^2 und 3,6 Amp. Leerstrom, vgl. Schaltung V).

Mit Benutzung des soeben beschriebenen Transformators in Schaltung I wurde durch die beiden oben erwähnten, in Serie geschaltenen Blei-Aluminiumzellen Wechselstrom von 20 Volt Spannung u. 40 Perioden durchgesendet. Ein in Serie eingeschalteter Gleichstrom-Deprez-Voltmeter zeigte 1 Volt an, ein Hitzdrahtvoltmeter 20 Volt.



A_1[1] = Hitzdrahtampermeter
A_2[2] = Deprez-Ampermeter
W = Wechselstrom
w = Widerstand

Hitzdrahtampermeter.	Deprez-Ampermeter.
4 Amp.	0.2 Amp.
8 „	1.8 „
9.5 „	2 „

Mit Hilfe einer zweipoligen Gleichstrom-Wechselstromumformermaschine wurde die Periodenzahl herabgesetzt. Bei gleicher Versuchsanordnung ergaben sich die Werte:

Hitzdrahtampermeter	Deprez-Ampermeter	Tourenzahl	Periodenzahl
5 Amp.	2 Amp.	600	10 ∼
10 „	3.6 „	700	ca. 12 ∼
0.2 bis 0.24 Amp.	0.08 bis 0.16 Amp.	120	2 ∼

Die Gleichstromampermeterangaben änderten sich im letzten Fall im Takt mit den Perioden zwischen 0.08 und 0.16 Amp.

Nunmehr wurden 4 Zellen nach dem eingangs erwähnten von Grætz angegebenen Schema zur Ausnutzung und Parallelschaltung beider Stromimpulse einer Periode geschaltet. Die 4 Zellen waren untereinander gleich. Jede enthielt 2 parallel geschaltete Bleiplatten (Wirksame Oberfläche: 23 dm^2) und 3 parallel geschaltete Aluminiumplatten (Wirksame Oberfläche: 24 dm^2) und ca. 30 l. Alaunlösung. Plattenabstand: 1 cm. Die in folgenden Tabellen für den Wechselstromkreis der Batterie angegebenen Wattmetermessungen wurden ausgeführt mit einem direkt zeigenden Präcisionswattmeter von Siemens und Halske (vgl. Etz. 1899. Heft 37 pag. 665). Die Wattangaben im Gleichstromkreis sind das Produkt aus Volt × Amp., nachdem zuvor an einer grösseren Zahl von Stichproben eine genügende Uebereinstimmung dieser Produkte mit den Angaben eines eingeschalteten Wattmeters festgestellt war. Die Angaben für Stromstärken und Spannung im Wechselstromkreise beziehen sich auf Hitzdrahtinstrumente von Hartmann und Braun; für den Gleichstromkreis dienten 2 Ampermeter und ein Voltmeter nach Deprez-d'Arsonval von H. u. B.; die Angaben der Ampermeter waren zuvor verglichen worden mit den Angaben des im Wechselstromkreise benutzten Präcisionswattmeters, dessen Stromspule von dem zu messenden Strome durchflossen wurde, während die Spannungsspule an eine genau gemessene Akkumulatorenspannung angelegt war. Es sei hier noch besonders erwähnt, dass natürlich bei diesen pulsierenden Gleichströmen die Angaben der Gleichstromampermeter mit Permanentmagneten, sowie auch die des als Ampermeter geschalteten Wattmeters kleiner sind als die der Hitzdrahtampermeter oder der Dynamometer, indem die ersteren die mittleren Werte der Stromstärken angeben, die letzteren die Mittelwerte der Quadrate, d. h. die angezeigte Stromstärke ist im letzteren Falle die Quadratwurzel aus den Mittelwerten der Quadrate der einzelnen Stromstärken.

Es bedeuten:

GV: Gleichstromspannung in Volt
GA: Gleichstromstromstärke in Amp.
GW: Gleichstrom-Watt
WV: Wechselstrom-Volt
WA: » -Amper
WW^w: » -Watt wirkliche, gemessen mit Wattmeter
WW^s: » -Watt scheinbare.

J. Messreihe.

Gleichstromkreis offen, nur mit Voltmeter belastet:

WV		WA	WW^s	WW^w	GV	cos φ
10		5.6	60	15	3.2	0.25
20	anfangs:	17.0	340	125	16.0	0.37
»	nach 10 Sec.:	9.3	186	75	»	0.40
»	» 1 Min.:	9.0	180	45	»	0.25
»	» 10 »	9.0	180	40	»	0.22
	Nunmehr zurück auf den niederen Spannungswert.					
10		4.3	43	6.5	3.2	0.15
30	anfangs:	15.2	456	237	26	0.52
»	nach 1 Min.:	14.1	423	163	»	0.39
»	» 2 »	13.6	408	137	»	0.33
»	» 3 u. 5 »	13.6	408	137	»	»
41	anfangs:	28	1148	640	38	0.55
»	nach 1 Min.:	20.5	840	435	»	0.52
»	» 2 »	18.8	771	370	»	0.48
»	» 5 »	16.7	685	285	»	0.41
52	anfangs:	36	1872	1150	43	0.61
»	nach 1 Min.:	26	1352	800	»	0.59
»	» 2 »	24	1248	670	»	0.53
»	» 3 »	22	1144	550	»	0.48
	Zurück auf:					
40	anfangs:	13.5	540	260	34	0.48
»	nach 2 Min.:	13.7	548	265	»	0.48
29	anfangs:	8.6	249	65	25	0.26
»	nach 2 Min.:	8.9	258	70	»	0.27
20		5.6	112	12.5	14	0.11
10		2.8	28	2.5	3.0	0.09

Bemerkenswert ist die Abnahme der scheinbaren und wirklichen Watt gegenüber den Anfangswerten, beim Rückgang von höheren Spannungen zu niederen; das cos φ erreicht für die niedrigsten Spannungen die kleinsten Werte. Bisher wurde Wechselstrom von 40 Perioden benutzt; die folgende Messreihe zeigt das Verhalten der Zellen gegenüber Wechselstrom anderer Periodenzahl. Der Wechselstrom wurde an den Schleifringen einer 2-poligen Umformermaschine abgenommen, deren Gleichstromseite mit 120 Volt Gleichstrom gespiesen wurde. Die Tourenzahl der Maschine wurde durch entsprechende Regulierung der Gleichstromspannung und des Nebenschlusses auf das gewünschte Mass gebracht; der abgenommene Wechselstrom passierte einen 1 KW. Transformator mit veränderlichen Sekundärspulen, zum Zwecke der Erzeugung der nötigen Spannung.

II. Messreihe.

WV	WA	WW^s	WW^w	Periodenzahl	GV	cos φ
20	5.5	110	35	40	14	0.32
»	3.0	60	6.3	22	—	0.10
»	2.5	50	—	16	—	—
»	1.7	37	3.7	13	—	0.10
»	1.2	32	3.0	10	—	0.10
26	4.3	112	15.2	25	—	0.13
30	3.5	105	15.0	17	25	0.14
40	6.0	240	50	19	36	0.21
»	5.0	200	43	16	»	0.22

III. Messreihe.

Ladung von 7 hintereinander geschalteter Akkumulatoren (System Pollak) mit dem Gleichstrom der Batterie. (Wechselstrom 40 ∼) Kapazität der Akkumulatoren 22 A.-St. Ausser dem Widerstand der ziemlich langen Zuleitung war kein Vorschaltwiderstand im Ladekreis der Akkumulatoren.

Zeit	WV	WA	WW^s	WW^w	GV	GA	GW	Wirkungsgrad	cos φ
10 h 34 Min.	29	10.6	307	165	18.4	4.0	73.6	44%	0.53
10 h 40 »	»	9.6	278	152	18.4	3.0	55.2	36%	0.54
10 h 46 »	»	9.6	278	142	18.2	2.6	47.3	33%	0.51
10 h 52 »	»	9.6	278	142	18.1	2.5	45.3	32%	0.51

Temperatursteigerung der Alaunlösung 0.20° C. gemessen,
0.26° C. berechnet.

Ladung der gleichen Batterie mit einem Vorschaltwiderstand von ca. 1.4 Ohm.

Zeit	WV	WA	WW^s	WW^w	GV	GA	GW	Wirkungsgrad	Temp. der Zellen	Cos φ
1 h 55 Min.	41	15.3	627	360	25	3.8	95	27%	19.2° C.	0.57
2 h 10 »	»	15.3	627	370	25.3	3.7	94	26%	19.8° C.	0.59
2 h 28 »	»	15.5	636	430	25.4	3.7	94	22%	20.4° C.	0.67
2 h 40 »	»	16.8	689	450	25.4	3.65	93	21%	20.8° C.	0.66
2 h 55 »	»	17.8	730	465	25.1	3.5	88	19%	21.2° C.	0.64
3 h 40 »	»	19.4	795	525	24.9	3.3	82	16%	23.3° C.	0.66
4 h 00 »	»	19.9	815	550	25.0	3.3	82	15%	23.9° C.	0.67
4 h 15 »	»	21	861	575	25.0	3.1	78	14%	24.6° C.	0.67
4 h 55 »	»	22	904	610	25.0	2.9	72	12%	26.4° C.	0.67

Beim Unterbruch des Gleichstroms:

4 h 55 Min.	42	14.8	621	325	33	0	0	—	—	0.52

Temperaturerhöhung der Alaunlösung gefunden: 7.2° C.
» » » berechnet: 8.3° C.,
ohne Rücksicht auf Verluste durch Strahlung und Leitung und anderweitige Stromarbeit.

Während des dreistündigen Stromdurchgangs ergab sich somit bei abnehmender Drosselwirkung ein dauerndes Anwachsen der wahren und scheinbaren Watt, bei annähernd konstant bleibendem cos φ.

Im Weiteren wurde der Gleichstromkreis verschiedenen Belastungen ausgesetzt mit Hilfe eines Metallrheostaten, bestehend aus 10 2 $^m/_m$ Nickelindrahtspiralen von je 1 Ohm, die einzeln oder gruppenweise hintereinander oder parallel geschaltet werden konnten, sodass der Widerstand sich verändern liess von 10 bis $^1/_{10}$ Ohm in allen Abstufungen.

IV. Messreihe.

WV	WA	WW^s	WW^w	GV	GA	GW	Wirkungsgrad	cos φ
10	3.0	30	3	3.2	0	0	—	0.10
20	5.5	110	15	14.3	0	0	—	0.14
»	7.1	142	60	9	1.0	9	15%	0.42
»	7.5	150	75	7.9	1.7	13.4	18%	0.50
»	7.6	152	85	7.1	1.9	13.5	16%	0.56
»	8.0	160	88	6.6	2.2	14.5	17%	0.55
»	8.3	166	107	5.9	3.0	17.7	17%	0.64
»	9.4	188	130	4.8	5.3	25.4	19%	0.69
»	12.2	244	195	4.1	9.0	36.9	19%	0.79
»	14.8	296	255	3.9	10.5	41.0	16%	0.87
»	16.5	330	295	3.4	12.5	43.0	15%	0.89
»	24	480	435	1.0	23.0	23	5%	0.90
30	9.0	270	40	25	0	0	—	0.15
»	11.2	336	180	18.8	2.0	37.6	21%	0.53
»	11.5	345	185	17.6	2.2	38.7	22%	0.53
»	12.0	360	193	17.5	2.3	40.3	21%	0.53
»	12.1	363	198	16.8	2.6	43.6	22%	0.54
»	12.3	369	210	16.3	3.0	48.9	23%	0.57
»	12.6	378	230	15.8	3.4	53.7	24%	0.61
»	13.4	402	260	15.0	4.1	62	24%	0.64
»	14.8	444	275	14.4	5.1	73.4	26%	0.62
»	16.0	480	325	12.4	7.2	89	27%	0.68
29	20.5	594	515	11.4	12.5	143	28%	0.86
28	30	840	730	10.2	21.0	214	29%	0.87
27	40	1080	990	8.2	27.0	221	22%	0.91
27	45	1215	1150	8.0	29	232	20%	0.94
27	52	1404	1330	6.0	36	216	16%	0.95
42	17.5	735	400	27	3	81	22%	0.54
»	18.8	790	440	26	4	104	24%	0.55
»	20	840	490	25.8	5.2	134	27%	0.58
»	25	1025	595	25	7.0	175	29%	0.58
41.5	29	1204	900	24	11.8	283	31%	0.74
41	40	1640	1238	21	19.2	403	32%	0.75
39	48	1872	1550	17	28	476	31%	0.83

WV		WA	WW^s	WW^w	GV	GA	GW	Wirkungsgrad	cos φ
38		57	2166	1875	15	34	510	28%	0.87
38		61	2318	2100	13.8	41	566	27%	0.91
37		64.5	2387	2250	13	46	598	26%	0.94
36		75	2650	2500	11	56	616	24%	0.95
51	0-2 Min.	21	1071	500	38	0	0	—	0.46
»		18.5	944	440	40	0	0	—	0.46
»		16.5	842	365	43	0	0	—	0.43
»		22	1122	650	35	4.1	144	22%	0.58
»		23	1173	687	35	5.4	189	27%	0.59
»		25	1275	870	34.5	7.4	254	29%	0.68
»		27	1350	950	31	10.4	312	33%	0.70
»		30	1500	1100	29	14.0	406	37%	0.73
49		39	1911	1375	26	25	650	47%	0.72
46		49	2254	1950	22	42	924	48%	0.86
45		59	2655	2375	19	50	950	40%	0.90
63		21	1333	1000	48	0	0	—	0.75
»		28	1764	1320	43	4.5	194	15%	0.75
»		29	1827	1370	42.5	5.7	242	18%	0.75
»		31	1953	1500	42.0	7.5	315	21%	0.77
62		33	2046	1612	41.5	10.3	428	26%	0.79
»		35	2170	1700	40.0	12.8	512	30%	0.79
»		40	2480	2075	38.0	18.0	684	33%	0.84
58		49	2842	2300	34.0	32.0	1088	47%	0.81
55		63	3465	3000	28.0	49.0	1372	46%	0.86
50		70	3500	3437	24.0	58.0	1392	40%	0.98

Bei Betrachtung obiger Tabellen ergeben sich folgende Gesetzmässigkeiten:

1. Im Wechselstromkreise besteht zwischen Strom und Spannung eine Phasenverschiebung, welche bei Leerlauf (d. h. unbelastetem Gleichstromkreise) am grössten ist und bei steigender Gleichstrombelastung immer mehr zurückgeht.
2. Der maximale Wirkungsgrad nimmt bis zu einem gewissen Grade mit steigender Wechselstromspannung zu;

in unserm Fall wird er erreicht bei einem äussern Nutzwiderstand von ca. 0.5 Ohm ($\cos \varphi = 0.8$).

Bemerkenswert ist die Veränderung im Aussehen der Aluminiumbleche nach länger andauerndem Betriebe bei starker Belastung im Gleichstromkreise. An zahlreichen Stellen wachsen allmählich cylindrische Säulchen (bis 7 $^{m}/_{m}$ hoch und 1 $^{m}/_{m}$ dick) einer weisslich-graulichen Verbindung senkrecht aus den Blechen heraus. Diese Auswüchse haben eine täuschende Ähnlichkeit mit den bekannten Thonerdeausblühungen, die sich im Verlaufe von wenigen Minuten aus Aluminiumblechen unter Einwirkung des Luftsauerstoffs erheben, nach Verletzung der schützenden Oxydschicht durch geeignete Behandlung mit Natronlauge und Quecksilber. Nach den Untersuchungen von K. Norden (Zeitschrift für Elektrochemie, 1899, p. 199) scheint es kaum zweifelhaft, dass auch hier die cylindrischen Säulchen und fadenförmigen Gebilde vorherrschend aus $Al_2 O_3$ bestehen. Je stärker eine Batterie im Verhältnis zu ihrer Grösse beansprucht wird, d. h. je grösser die Stromdichte ist, desto reichlicher bilden sich diese Auswüchse, deren Entstehung keine günstige Prognose gestattet, bezüglich der Haltbarkeit der Zellen, bei andauernder stärkerer Belastung.

Nach mehrtägiger Beanspruchung der Batterie ergaben wiederholte Messungen über Leerlaufsströme abermals andere Resultate als früher:

WV	WA	WW^s	WW^w	GA	$\cos \varphi$
9.6	2.2	21	5	0	0.24
19	4.9	93	22.5	»	0.24
30	7.0	210	52.5	»	0.25
40	10.0	400	105	»	0.26
50	13.5	675	250	»	0.37
	6 Stunden später:				
10	2.2	22	5	»	0.23
20	5.0	100	25	»	0.25
30	7.1	213	55	»	0.26
40	10.0	400	108	»	0.27
51	14.4	734	310	»	0.42

Nach sechswöchentlicher Ruhe:

WV	WA		WW^s	WW^w	CA	cos φ
10	2.3		23	16.7	0	0.73
19.4	24	anfangs;	465	450	»	0.97
19.0	14.4	nach 1 Minute;	273	200	»	0.73
20.0	13.9	nach 2 Minuten;	273	200	»	0.72
19.6	11.3	nach 5 Minuten;	221	140	»	0.63
30.0	23.2	anfangs;	696	520	»	0.75
»	13.7	nach 1 Minute;	411	280	»	0.68
40.0	33	anfangs;	1320	1100	»	0.83
»	22	nach 1 Minute;	880	650	»	0.74
»	15.8	nach 2 Minuten;	632	450	»	0.71
50	32	anfangs;	1600	1400	»	0.87
	21	nach 2 Minuten;	1050	800	»	0.76
	Zurück auf:					
40	12		480	350	»	0.73
30	6.7		201	80	»	0.40
20	4.2		84	29	»	0.34
10	1.9		19	7	»	0.37

Mehrstündige Einschaltung der Batterie zur Bestimmung der Änderung des Leerlaufverlustes ergaben:

WV	WA	WW^s	WW^w	cos φ	Zeit	Temp. der Zellen
42	11.1	466	110	0.24	3^h 13 Min.	15.8° C
41.5	10.9	452	145	0.32	3^h 45 »	16.2° C
»	11.0	456	160	0.35	4^h 15 »	16.6° C
»	11.0	456	180	0.39	4^h 45 »	17.3° C
»	11.0	456	188	0.41	5^h 03 »	17.7° C
42	11.3	475	210	0.44	6^h 03 »	18.6° C

Im Fernern erschien es von Interesse das Verhalten der Batterie zu prüfen, wenn die Elektrodenoberfläche auf die Hälfte reduziert würde. Ohne daher den Plattenabstand zu verändern wurde je eine Aluminiumplatte und Bleiplatte pro Zelle abgeschaltet; die wirksame Al-Oberfläche betrug nunmehr 12 dm^2; die Bleifläche 11 dm^2.

V. Messreihe.

Gleichstromkreis unbelastet:

WV	WA	WW_s	WW_w	GV	GA	GW	Wirk. Grad	cos φ
10.6	1.9	20	6	—	—	—	—	0.30
21.6	4.0	86.4	27.5	13	—	—	—	0.32
32	5.0	160	60	26	—	—	—	0.37
44	8.5	374	125	38	—	—	—	0.33
56	13.5	756	460	44	—	—	—	0.61

Gleichstromkreis belastet:

41	12.7	521	365	27.5	2.9	79.8	22%	0.70
43	13.2	568	395	26.5	3.5	93	24%	0.69
41	14.0	574	410	25	4.3	108	27%	0.71
»	16.0	656	460	24	6.5	156	34%	0.70
40	17	680	540	23	8.3	191	35%	0.79
»	20	800	650	22	11.0	242	37%	0.81
39	25	975	870	19	17.2	327	37%	0.89
»	36	1404	1387	16.5	30	495	36%	0.98
38	42	1596	1575	14.8	35	518	33%	0.99
»	49	1862	1775	12.5	41	513	29%	0.96
»	52	1976	1850	12.0	44	528	29%	0.94
36	61	2196	2125	10	50	500	23%	0.97
35	63	2205	2200	9	52	468	21%	0.99
32	9.8	314	220	18.0	1.9	34	15%	0.70
»	10.5	336	250	17.4	2.3	40	16%	0.74
»	11.3	362	270	16.3	2.8	46	17%	0.75
»	12.8	409	330	15.3	4.0	61.2	18%	0.80
»	18.0	576	465	14.0	7.5	105	22%	0.81
»	23.0	736	630	11.7	11.8	138	22%	0.85
31	29	899	775	9.6	18	173	22%	0.86
»	32	992	830	9.0	20	180	22%	0.84
»	37	1147	1010	7.0	26	182	18%	0.88
»	44	1364	1175	5.7	32	182	16%	0.87

Die an früherer Stelle erwähnte Beobachtung, dass bei länger dauernder Belastung die Drosselwirkung abnimmt und bei sinkendem Nutzeffekt im Gleichstromkreise die wahren und

scheinbaren Watt im Wechselstromkreise immer zunehmen, findet sich ebenfalls deutlich bestätigt durch nachfolgende Messungen mit einer kleinen Umformerbatterie, die ursprünglich zur Ladung einer 7-zelligen Akkumulatorenbatterie von 22 A. St. Kapazität dienen sollte, sich aber dazu als unbrauchbar erwies. Jede der 4 Zellen der kleinen Batterie enthielt 4 parallel geschaltete Aluminiumbleche und 4 parallel geschaltete Bleiplatten; wirksame Al-Oberfläche einer Zelle = 8.4 dm^2; wirksame Bleioberfläche 8 dm^2; Abstand der Platten ca. 1 cm; Inhalt einer Zelle: 2.5 Liter Alaunlösung.

VI. Messreihe.

Ladung von 7 Akkumulatoren.

WV	WA	WW^s	WW^w	GV	GA	GW	Wirk. Grad	cos φ	Temp. der Zellen	Zeit
30	18	540	400	18.0	2.6	47	12%	0.74	20° C.	9h 4 Min
»	21.5	645	500	17.8	2.0	36	7%	0.77	23° C.	9h 12 »
»	24	720	550	17.8	2.0	36	6%	0.79	27.5° C.	9h 14 »
»	27.5	825	660	17.2	1.9	33	5%	0.80	35° C.	9h 17 »
»	30	900	720	17.0	1.6	27	3%	0.80	39° C.	9h 20 »

VII. Messreihe.

Ladung eines Akkumulators mit ca. 1 Ohm Vorschaltwiderstand.

21	3.2	67	25	15	0	0	0	0.37	22.5° C.	1h 48 »
21.2	8.0	170	150	6.4	3.3	21	14%	0.88	—	1h 50 »
21.0	10.8	226	180	6.1	3.1	19	11%	0.80	—	1h 52 »
»	12.5	262	220	5.8	3.0	17.4	8%	0.84	26° C.	1h 55 »
»	14.0	294	245	5.8	2.9	16.8	7%	0.83	28° C.	2h 00 »
»	16.0	336	290	5.7	2.8	15.9	6%	0.86	30° C.	2h 07 »
20.5	16.5	338	295	5.7	2.6	14.8	5%	0.88	33.5° C.	2h 14 »
20.8	17.5	364	305	5.7	2.6	14.8	4.8%	0.84	36° C.	2h 19 »
20.7	19	393	325	5.7	2.6	14.8	4.6%	0.83	39° C.	2h 26 »
20.7	20	414	350	5.7	2.7	15.3	4.4%	0.84	41.5° C.	2h 31 »
21.0	21.5	451	370	5.9	2.8	16.5	4.4%	0.82	44° C.	2h 36 »
20.8	22	457	380	5.9	2.7	15.9	4.2%	0.83	46° C.	2h 39 »
21.0	23	483	395	5.8	2.7	15.6	4.0%	0.82	50° C.	2h 48 »

Haller Redivivus.

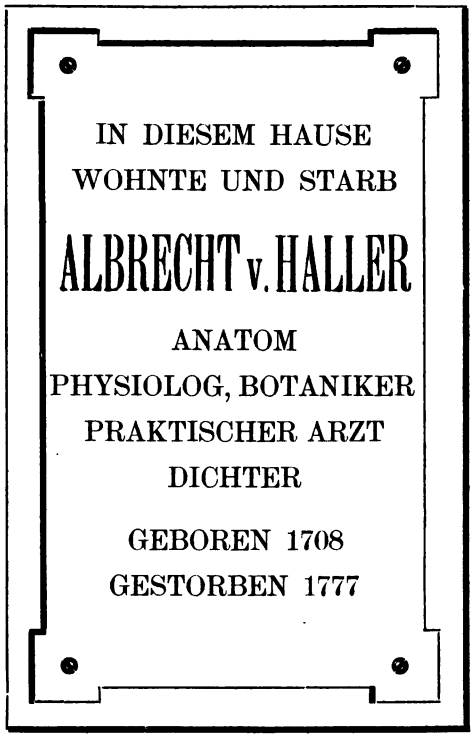
Am 17. Juli 1777, einige Monate vor dem Tode des grossen Berner Gelehrten — Albrecht von Haller — besuchte ihn Kaiser Joseph II. in seiner Wohnung an der Inselgasse zu Bern.

Über diesen Besuch findet sich in einem Wiener Briefe vom 30. Januar 1779 folgender Bericht:

„Haller, niedergedrückt von Alter und Krankheit, lebte ganz auf bei dem Anblicke Josephs. Er hatte Gegenwart des Geistes, Stärke, Heiterkeit und erweckte durch seine lebhafte Unterhaltung bei dem Monarchen ebensoviel Verwunderung als Vergnügen. Er war mitten in seiner Arbeit, als der Kaiser in sein bescheidenes Zimmer trat. Haller sprach zuerst und sagte: Gnädiger Herr! Sie erweisen einem sterbenden Greise zu viel Ehre. Der Kaiser, der ihn ganz mit Papieren und Büchern umgeben sah, fragte gleich, ob ihn die Arbeit nicht zu sehr ermüde, und Haller erwiderte, die Arbeit sei sein einziges Labsal, dadurch allein vergesse er zuweilen seine Gebrechen. „Dichten Sie noch?“ fuhr der Kaiser fort. „Das war meine Jugendsünde!“ antwortete Haller, „Herr von Voltaire allein macht Verse im achtzigsten Jahr.“

„Nun wandte sich das Gespräch auf medicinische Gegenstände, auf praktische Fälle, auf Van Swieten und de Haen; Haller war sehr gerecht gegen die Verdienste dieser grossen Männer, vergass aber doch nicht ganz seiner mit denselben gehabten Streitigkeiten. Sonach kam der Kaiser auf Göttingen, auf die dortige Societät der Wissenschaften und ihre Einrichtung, endlich auf den Zustand der Gelehrsamkeit überhaupt und zumal auf einige deutsche Gelehrte. Haller sprach von diesen Gelehrten mit vieler Billigkeit, auch mit Nachsicht, wo es nötig war, und von sich selbst mit der grössten Bescheidenheit, indess der

Haller's Wohnhaus an der ehemaligen Inselgasse in Bern.



MEMORIAE · AETERNAE

ALBERTI · HALLER

DOCTRINA · ET · INGENIO
NVLLI · MORTALIVM · SVI · AEVI · SECVNDI
QVEM · IN · HAC · DOMO · INTER · MORBOS
ET · STVDIA · VITA · DEGENTEM

IOSEPHUS · CAES. · AVG. · ADIIT

NUNC · FATIS · ABREPTVM
LVGENT · AMICI · PATRIA · MVSAE
OBIIT · A.V. C.*) DLXXXVI. AETAT. LXX.

*) A. V. C. bedeutet: Von Gründung der Stadt Bern ab.

Kaiser sich gegen ihn immer auf die liebreichste Art ausdrückte. Dieser merkwürdige Besuch dauerte eine Stunde. Der Eindruck, den er bei dem Monarchen und seiner Gesellschaft zurückliess, war ausserordentlich durch die vollkommenste Achtung für Haller und das unauslöschliche Andenken. Hievon hatte ich zwei Tage nachher die Ehre, in Basel ein Zeuge zu sein. Seine Majestät sprachen von Haller mit dem lebhaftesten Vergnügen, schätzte den Anlass, ihn gesehen zu haben, und sagte oft: „Ja — das ist ein Mann! Wie Wenige sprechen mit einer so männlichen Beredsamkeit und mit so vieler Würde; — wie wenige habe ich gekannt, bei denen ich so ganz den grossen Mann sah und den Mann voll Rechtschaffenheit; — wie wenige so geistvoll in Bildung, Stimme, Geberde und Ausdruck! Nie werde ich diese interessante Stunde vergessen. Wie schade, dass der Verlust dieses grossen Mannes so nahe ist.“ Bald hernach, den 20. September, kam ich in Bern zu dem Herrn von Haller. Er war sehr schwach und noch ganz in der Arbeit. Ich erzählte ihm die liebevollen Worte des Monarchen, die ich so glücklich gewesen war, selbst zu hören. Haller ward gleich wieder lebhaft und schien sehr gerührt. „Ich gehöre kaum mehr zu dieser Welt,“ sagte er, „wenige Dinge haben für mich Reiz und Wert; aber die Güte, die Liebe eines so tugendhaften, so rechtschaffenen Herrschers über viele Völker, die er glücklich machen wird. kann mir nicht gleichgültig sein. Ich liebe den Kaiser aus dem Grunde meines Herzens und verehre seine Denkungsart am Rande meines Grabes.“

Hallers Vaterstadt rüstet sich zur 200. Wiederkehr seines Geburtstages — am 8. October 1908 — ihm ein seiner würdiges Denkmal zu erstellen. Nicht nur in seiner Heimat gedenkt man dieser Feier und auch der Ehrenpflicht sein Wohn- und Sterbehaus zu erhalten, sondern in allen Ländern, deren Nationen Verständnis und Interesse für die Leistungen und Schöpfungen des vielumfassenden Gelehrten und Dichters besitzen.

Auch in seinen Poesien erkennt man den Naturforscher und eine Parallele zwischen ihm und Göthe, der auch in seinen Naturforschungen Dichter blieb, mag ein nicht unnöthiger Beitrag zur Litteraturgeschichte sein.

Haller preist in seinen dem Physiker Staehelin gewidmeten

Gedichte: „Die Falschheit menschlicher Tugenden“ die Naturwissenschaft und Newton in folgenden begeisterten Strophen:

Versenkt im tiefen Traum nachforschender Gedanken
Schwingt ein erhabner Geist sich aus der Menschheit Schranken
— — — — — — — — — — — — — — —
Wie durch unendlicher verborgner Zahlen Reih'
Ein krummgeflochtner Zug gerecht zu messen sei.
Warum die Sterne sich an eigne Gleise halten
Wie bunte Farben sich aus lichten Strahlen spalten
Was für ein innrer Trieb der Welten Wirbel dreht.
Was für ein Zug das Meer zu gleichen Stunden bläht.
Das alles weiss er schon, er füllt die Welt mit Klarheit
Er ist ein steter Quell von unerkannter Wahrheit.
— — — — — — — — — — — — — — —
Den Zug, der alles senkt, den Trieb, der alles dehnt,
Den Reiz in dem Magnet, wonach sich Eisen sehnt,
Des Lichtes schnelle Fahrt, die Erbschaft der Bewegung,
Der Theilchen ewig Band, die Quelle neuer Regung,
Dies lehre, grosser Geist, die schwache Sterblichkeit,
Worin Dir niemand gleicht und alles Dich bereut.
Doch suche nur im Riss von künstlichen Figuren
Beim Licht der Ziffer — Kunst, der Wahrheit dunkle Spuren;
Ins Innre der Natur dringt kein erschaffner Geist;
Zu glücklich, wann sie noch die äussre Schale weist!
Du hast nach reifer Müh und nach durchwachten Jahren
Erst selbst wie viel uns fehlt, wie nichts Du weisst erfahren.“

Göthe, der grimmige Gegner von Newtons Farbenlehre war erbittert über diese Verherrlichung des grossen Physikers und verhöhnte Haller in seinen Gedichten: „Allerdings“ und „dem Physiker“ folgendermassen: „Ins Innre der Natur“ — O du Philister! — „dringt kein erschaffner Geist“, Mich und Geschwister mögt Ihr an solches Wort nur nicht erinnern; Wir denken: Ort für Ort, Sind wir im Innern.“ „Glückselig wenn sie nur die äussre Schale weist!“ „Das hör ich sechzig Jahre wiederholen; Ich fluche drauf, aber verstohlen; Sage mir tausend, tausendmale: — Alles gibt sie reichlich und gern; Natur hat weder Kern — Noch Schale, — Alles ist sie mit einem Male; — Dich prüfe nur allermeist — Ob du Kern oder Schale seist.“

Und sodann im „Ultimatum."

„Wir kennen Dich Du Schalk! — Du machst nur Possen; Vor unsrer Nase doch — Ist viel verschlossen. — Ihr folget falscher Spur; denkt nicht wir scherzen! — Ist nicht der Kern der Natur Menschen im Herzen?"

Göthes Meinung über die Naturwissenschaft erkennt man aus einigen seiner „Sprüche in Prosa." Er sagt dort:

„Es wird eine Zeit kommen, wo man eine pathologische Experimentalkritik vorträgt und alle jene Spiegelfechtereien ans Tageslicht bringt, welche den Verstand hintergehen, sich eine Überzeugung erschleichen und, was das Schlimmste daran ist, durchaus jeden praktischen Fortschritt verhindern. Die Phænomene müssen ein für allemal aus der düstern empirisch-mechanisch-dogmatischen Marterkammer vor die Jury des gemeinen Menschenverstandes gebracht werden."

„Dass Newton bei seinen prismatischen Versuchen die Öffnung so klein als möglich nahm, um eine Linie zum Lichtstrahl bequem zu symbolisiren, hat eine unheilvolle Verirrung über die Welt gebracht an der vielleicht noch Jahrhunderte leiden."

„Der Magnet ist ein Urphænomen, das man nur aussprechen darf, um es erklärt zu haben; dadurch wird es denn auch ein Symbol für alles Übrige, wofür wir keine Worte noch Namen zu suchen brauchen." „Wenn ich die Augen recht ordentlich aufmache, sehe ich so ziemlich Alles, was zu sehen ist."

Im „polemischen Teile" zur Farbenlehre sagt Göthe:

„Wir können uns doch nicht enthalten zu behaupten, dass sich durch Erfahrung und Versuche eigentlich nichts beweisen lässt." Newtons Hauptexperiment nennt er „Muster von sophistischer Entstellung der Natur." [1]) In den Gesprächen mit Eckermann klagt er (1823): „Die mathematische Gilde hat meinen Namen in der Wissenschaft so verdächtig zu machen gesucht, dass man sich scheut ihn nur zu nennen." „Aber

[1]) Nach Göthes eigener Darstellung sagte aber Newton, dass es ganz gleichgültig sei, was für eine Theorie man zur Erklärung dieser Phänomene anwenden wolle; ihm sei es nur um die Thatsache zu thun. dass diese farbebringenden Eigenschaften des Lichtes durch Refraction manifestiert würden und sich eben auch so durch Reflexion, Inflexion u. s. w., manifestierten.

sagen Sie selbst," fuhr er fort, „konnte ich nicht stolz sein, wenn ich mir seit 20 Jahren gestehen musste, dass der grosse Newton und alle Mathematiker und erhabenen Rechner mit ihm in Bezug auf die Farbenlehre sich in einem entschiedenen Irrtum befanden, und dass ich unter Millionen der Einzige sei, der in diesem grossen Naturgegenstande allein das Rechte wisse? Mit diesem Gefühl der Superiorität war es mir denn möglich, die stupide Anmasslichkeit meiner Gegner zu ertragen."

Schopenhauer übertrumpfte in seinem Grössenwahne Göthe. Er schrieb ihm (am 11. Nov. 1815): „Für die eigentliche Theorie Newtons, welche Sie umgestossen haben, haben Sie keine neue gegeben. Dies eben ist meine Arbeit gewesen; in ihr erhält das Publikum ..... die Kenntnis der letzten Ursache und des innersten Wesens aller möglichen Farbe überhaupt, erhält also vollen Ersatz für die Newtonsche Theorie, indem meine wirklich ist, wofür jene sich ausgab."

In seiner Abhandlung „über das Sehen und die Farben" sagt er „in der schattigen Natur der Farbe konnte man gewissermassen die Quelle der Newtonschen Irrlehre suchen, dass die Farben Teile des bei der Brechung zersplitterten Lichtstrahls seien."

In gewohnter Heftigkeit polemisirt Schopenhauer gegen des grossen Physikers Pouillets Darstellung der Farbenlehre mit folgenden Worten: „Da finden wir auf 20 grossen Seiten die ganze Newtonsche geoffenbarte Farbenlehre vorgetragen, mit der Sicherheit und Dreistigkeit, als wäre es ein Evangelium und mit sämtlichen Newtonischen Taschenspielerstückchen nebst ihren Cautelen und Hinterlisten ..... unter gänzlicher Verschweigung der Widerlegung — eine colössale ignorantia elenchi."

Diese Naturphilosophen wussten die Farben nicht anders zu definieren, als nach den Eindrücken die sie auf sie übten, mit Verachtung physikalischer Eigenheiten: Schwingungszahl, Wellenlänge, Brechbarkeit etc. Ob die höchste Blüthe der Newtonschen Versuche: die Spectralanalyse wohl Göthe und Schopenhauer bekehrt haben würde?

Göthe lässt Faust sein naturwissenschaftliches Glaubensbekenntnis in folgende Verse kleiden: „Geheimnisvoll am lichten Tag lässt sich Natur des Schleiers nicht berauben, und was sie

Deinem Geist nicht offenbaren mag, das zwingst Du ihr nicht ab mit Hebeln und mit Schrauben."

Schiller mag wohl missbilligend an diese Worte gedacht haben, als er im „Würtembergischen Repertorium" (1782) folgendes Grabmal für Haller empfiehlt:

„Über dem Sarge zerreisst die Philosophie den Schleier, der über die Natur herabhing. Seine Werke, mit Lorbeer in den Schlangenstab und eine Leyer gebunden, liegen auf dem Sarge umher. Auf der entgegengesetzten Seite weint Hygiäa über sein Medaillon hin."

Die Inschrift heisst:

Corpori leges
Animo officia
Assignavit.

Der Platz ist auf einem Hügel ausser dem Kirchhof."

Schiller, der Regimentsmedicus und Verfasser der 2 Probeschriften: „Philosophie der Physiologie" und „Über den Zusammenhang der tierischen Natur des Menschen mit seiner geistigen" schildert in vollendeterer Poesie als Haller das Studium des Naturforschers, zumal Newtons in der Elegie „der Spaziergang":

„Aber im stillen Gemach entwirft bedeutende Zirkel
Sinnend der Weise, beschleicht forschend den schaffenden Geist.
Prüft der Stoffe Gewalt, der Magnete Hassen und Lieben,
Folgt durch die Lüfte dem Klang, folgt durch den Äther dem Strahl
Sucht das vertraute Gesetz in des Zufalls grausenden Wundern,
Sucht den ruhenden Pol in der Erscheinungen Flucht."

Emil du Bois-Reymond, einer der Begründer der modernen Physiologie, wendet sich in seiner Rectoratsrede („Göthe und kein Ende" 1882) gegen die blinde Verehrung Göthes als Naturforscher mit folgenden Sätzen:

„Mehr als seine eigenen Erfolge nützten, schadete die falsche Richtung, welche er der damals durch die sogenannte Naturphilosophie schon hinlänglich bethörten deutschen Wissenschaft einprägte. Man erinnere sich des argen mit der Wirbeltheorie getriebenen Missbrauches. Weithin verbreitet in den Schriften jener Zeit findet man seine unverkennbare Manier, seine Vorurteile, seine nicht immer unbedenklichen Maximen.

Gerade die Talentvollsten, welche Reichtum der Phantasie, Gedankenfülle und allgemeine Bildung ihm als Jünger zuführten, unterlagen am leichtesten diesem Einflusse. Sogar Johannes Müller war, bis zur gefährlichen Krise, aus der er als objectiver Forscher geläutert hervorging, in Götheschen Meinungen so befangen, dass der künftige Erneuerer der experimentellen Richtung in der deutschen Physiologie den „Versuch" gegenüber dem von Göthe empfohlenen blossen „Schauen" mit den Worten verketzert: „Die Beobachtung schlicht, unverdrossen, fleissig, aufrichtig, ohne vorgefasste Meinung, — der Versuch künstlich, ungeduldig, emsig, abspringend, leidenschaftlich, unzuverlässig."

Dagegen preist du Bois-Reymond den „Dichter" Göthe mit begeisterten Worten, wie es dem Künstler der Rede und Schrift, dem Entdecker eines Götheschen Gedichtes: „Eblis", dem Vater der meisterlichen Novellistin wohl ansteht.

Albrecht von Haller imponiert zunächst durch seine schlichte Charaktergrösse, die frei bleibt von der Selbstverherrlichung Göthes oder Schopenhauers.

Er fordert (in seinen Opera minora Tom. I, p. 131) vom Gelehrten: „Zunächst muss man die Geschichte der Experimente behandeln, dieselbe berücksichtigen mit jener ehrlichen Reinheit, welche ich höher schätze als das Genie."

In den 8 Quart-Bänden seiner „Elemente der Physiologie" findet man die Entwickelung und den Stand der Lebenswissenschaft bis zur zweiten Hälfte des 18. Jahrhunderts actenmässig begründet und die Resultate seiner eigenen Forschung eingeflochten. In den 3 Bänden seiner „Opera minora" teilt er die Ergebnisse seiner späteren Untersuchungen mit, während er im „Methodus studii medici" die gesamte naturwissenschaftlich-medicinische Literatur bespricht und dabei mehr als 4000 Bücher anführt und beurteilt.

Kein späterer Bearbeiter der Physiologie nahm es so genau mit der Geschichte seiner Wissenschaft.

Freilich war auch der Zusammenhang des internationalen Gelehrtenverbandes viel enger als heute, hauptsächlich wegen der gemeinsamen lateinischen Gelehrtensprache. Hierdurch war die Kenntniss der Fachlitteratur erleichtert. So documentirte sich auch schon äusserlich der gelehrte Stand.

Jeder Professor und jeder Student konnte an jeder grossen Universität lehren und lernen.

Jetzt, da man die „tote“ Gelehrtensprache wie einen unnützen Zopf bis auf Doctorendiplome — bisher Urkunden von internationaler Gültigkeit — und Adressen beseitigt hat, machen sich die Folgen der voreiligen Reform fühlbar.

In mindestens 17 Sprachen werden wissenswerte medicinische Werke gedruckt. Auf den internationalen Congressen bemerkt man die Schäden der Sprachverwirrung.

In unserer verkehrsreichen Zeit brauchen wir noch mehr als früher: Ein Verständigungsmittel der hochgeschulten Volksklassen.

Das mittelalterliche Latein hat sich vielleicht überlebt, die Naturwissenschaften streben nach internationaler Verständigung vermittelst der griechischen Sprache. — Auf „Gramm“ und „Meter“ beruht unser Maasssystem, auf der „Graphik“ unsere Verständigung über wissenschaftlich und technisch wichtige Vorgänge, auf der „Klinik“ unser ärztliches Wissen, unsere ärztliche Kunst.

Griechische Sprache und Mathematik sind die Hauptstützen unserer 2 Bildungsgebiete: des philosophisch-historischen und des mathematisch-naturwissenschaftlichen.

Die physikalischen, sodann auch die chemischen Untersuchungsweisen der Lebenserscheinungen wurden um die Mitte des vorigen Jahrhunderts von E. H. Weber, Helmholtz, C. Ludwig, du Bois-Reymond, Brücke, Kühne in ungeahnter Weise vervollkommnet, aber gar manches wurde wiedergefunden, was schon Haller beschrieben. Einige Beispiele mögen dies belegen:

In den Jahren 1854 und 55 waren die medicinischen und auch andere der Universität nahe stehende Kreise zu Wien in Erregung versetzt durch eine wissenschaftliche Fehde zwischen Brücke und Hyrtl, welche besonders von dem letzteren mit grosser Heftigkeit geführt wurde. — Es handelte sich um die sogenannte „Selbststeuerung des Herzens.“

Brücke meinte, dass der Blutstrom, den die linke Herzkammer in die grosse Schlagader wirft, nicht nur die halbmondförmigen Klappen öffnet, sondern dieselben gegen die Mündungen

der Kranzarterien presse, so dass kein Blut in die Herzwand einströme und die Zusammenziehung des Herzmuskels störe.

Hyrtl entgegnete, dass die Halbmondklappen bei den meisten Präparaten gar nicht bis zu den Kranzadermündungen reichen.

Viele bedeutende Physiologen jener Zeit nahmen Partei für und wider Brücke, bis Giulio Ceradini von Mailand 1872 in einer ausgezeichneten Abhandlung den „Mechanismus der halbmondförmigen Herzklappen" historisch und experimentell erklärte und dabei nachwies, dass nicht nur Haller (1739) Hyrtls Messungen gemacht hatte und durch Beobachtungen des schlagenden Herzens physiologisch begründet, sondern dass Haller in seiner historischen Darlegung der Frage Thebesius (1708) die (unrichtige) Theorie vom Schutzverschlusse zugeschrieben, dass aber zu jener Zeit viele Gelehrte sich für und wider diese Anschauung erklärt hätten.

Ähnlich ging es mit der Frage nach der Zusammenziehung der Blutgefässe. Allen Menschen ist wohl die Schamröte und das Erbleichen durch Schreck bekannt. Aber ob auch ohne Gehirnerregung die Gefässe sich verengen können, ist eine in neuerer Zeit, zumal von Goltz behandelte Frage und sowohl Aubert in seiner vortrefflichen Darstellung der Blutgefässinnervation wie Milne Edwards, der sonst in seinem 14 bändigen Lehrbuche der Physiologie gewissenhaft auf die Quellen unserer Kenntnisse verweist, beschreibt die selbständige Zusammenziehung der Arterien nach dem letzten Herzschlage, ohne einen Gewährsmann zu nennen.

Haller gibt im ersten Bande seiner Elemente der Physiologie eine Reihe von einfachen Versuchen an, durch die er nachwies, dass abgebundene Blutgefässstämme ihren Inhalt in ihre Zweige entleeren.

Dem grossen Anatomen Henle wird die Entdeckung einer elastischen Arterienhaut zwischen der innersten Haut und der Muskelhaut zugeschrieben.

Haller beschrieb in einem eignen § VIII des ersten Bandes seiner Elemente diese „Cellulosa interior." Er kannte die Muskelhülle der Arterien und gibt an, dass C. Gottlieb Ludwig in Leipzig 1739 auch in den Wandungen der Gehirnarterien einzelne Muskelfasern nachgewiesen habe.

Im Jahre 1850 berichtete Eduard Weber zu Leipzig «Über ein Verfahren, den Kreislauf des Blutes und die Function des Herzens willkürlich zu unterbrechen». Die Physiologen hielten alte Erzählungen von Menschen, die durch blossen Willen sterben konnten, für unglaubwürdig. Galen berichtet vom Tode eines Sklaven, der in Wut versetzt, sich tötete, indem er auf den Boden ausgestreckt den Atem anhielt. Auch Valerius Maximus erzählt folgende merkwürdige Begebenheit: Coma, der Bruder des Räuberhauptmanns Kleon, wurde gefangen nach Esina gebracht, welches den Räubern von den Römern abgenommen worden war. Als der Konsul Rupilius ihn über die Macht und die Absicht der Flüchtigen gefragt hatte, bat er um Zeit sich zu sammeln, verhüllte sein Haupt und indem er sich auf seine Knie stützte und den Atem unterdrückte, verschied er sorgenfrei unter den Händen seiner Wächter und vor den Augen des Machthabers. «Mögen sich die Elenden quälen, denen nützlicher ist zu sterben, als fortzuleben, mit ängstlichen Vorsätzen, wie sie aus dem Leben gehen sollen, mögen sie das Schwert schärfen, Gift mischen, zum Strange greifen, von ungeheueren Höhen herunterschauen, als ob es grosser Vorrichtungen bedürfte, um das schwache Band zwischen Leib und Seele zu trennen. Coma brauchte von alledem nichts, sondern fand dadurch, dass er den Atem in der Brust verschloss, seinen Tod.» Appianus erzählt ähnliches vom jüngeren Cato und von einem Haruspex. Der englische Arzt George Cheyne hat einen ähnlichen Todesfall beobachtet, giebt aber keine Erklärung des rätselhaften Todes. E. Weber erklärte den Tod folgendermassen: «Wird die Brusthöhle nach Verschliessung des Kehlkopfes .... verengert, so .... übt die Lungenluft gleichförmigen Druck auf das Herz und die grossen Gefässstämme aus. Weil der Zufluss des Blutes durch die Hohlvenen zum Herzen abgeschnitten ist, wird der Puls augenblicklich sehr klein ..... und bleibt, wenn aus dem leeren Herzen kein Blut mehr in die Aorta gelangt, ganz aus.» E. Weber erzählt von sich: «Als ich einmal die Zusammendrückung der Brust unabsichtlich etwas länger als gewöhnlich, gewiss aber noch keine Minute, fortgesetzt hatte, wurde ich ohnmächtig. Während dieses bewusstlosen Zustandes waren von den Umstehenden in meinem Gesichte schwache convulsivische Bewegungen bemerkt

worden, und als mir die Besinnung zurückkehrte, war das Gedächtnis des Vorgefallenen so vollständig verschwunden, dass ich, ungeachtet mein Puls wieder wie vorher laut gezählt wurde, mich in den ersten Augenblicken nicht erinnern konnte, wo ich war und was um mich vorging.»

Solches Zusammendrücken der Luft in der Brusthöhle geschieht bei vielen Körperverrichtungen: kurz dauernd bei Husten, Niesen, Brechen, oder länger während bei Darmentleerung und Krampfwehen und kann lebensgefährlich werden.

Gerade ein Jahrhundert zuvor hat aber schon Lamure noch vor Haller (wie dieser gewissenhaft angiebt) beschrieben, wie bei der Ausatmung zunächst der Brustkasten verengt wird, dabei nicht nur die Lungen, sondern auch die Vorkammern des Herzens zusammengedrückt werden, wodurch das Blut in den Venen gestaut wird und so die nahe der Brust gelegenen Organe geschwellt werden. Hierdurch erklärt Haller auch die Bewegungen des Gehirns bei der Atmung, die man nicht für möglich hielt.

Donders hat hundert Jahre später sich und Herrn Berlin das Verdienst dieser Beobachtung zugeschrieben.

Angelo Mosso hatte mit Giacomini Gelegenheit, an einem verwundeten Manne die Bewegungen des Gehirns zu beobachten und hat bei Beschreibung dieser interessanten Erscheinungen gewissenhaft auch Hallers Berichte angegeben.

Haller hat hierbei den Einfluss der Atmung auf den Blutkreislauf in den Lungen genau studiert. Er sagt: Beim Atemholen läuft das Blut mit Leichtigkeit aus der rechten Herzkammer in die erweiterte Lunge, daher leeren sich die Hohladern in die Vorkammer und die rechte Höhle des Herzens aus, die in diesem Augenblicke minder widerstehen. Unter dem Ausatmen widersteht die zusammengepresste Lunge dem Blute des Herzens, daher schwellen die grossen Blutadern. Zu ähnlichen Schlüssen kamen ein Jahrhundert. später Poiseuille, danach Quincke mit Pfeiffer und andere.

Eine der Haupterrungenschaften der modernen Anatomie und Physiologie ist die Kenntnis des Baus und der feineren Functionen des Gehirns, und daraus resultierte der Triumph der Gehirnchirurgie.

Hughlings Jackson machte 1870 die überraschende Mitteilung, dass durch Hirnverletzung epileptische Krämpfe entstehen können, während frühere Forscher, wie Astley Cooper (1836), angenommen hatten, dass die Anfälle durch Störungen des Blutlaufs im Gehirn erzeugt werden. Bei den Chirurgen gilt jetzt die «Rindenepilepsie» als eine durch Entfernung drückender Knochen heilbare Krankeit.

Haller handelt aber darüber schon im Jahre 1762 (im Band IV seiner «Elementa») und sagt: der Sitz des schrecklichen Übels (der Epilepsie) wird oft im Gehirn gefunden, wenn dasselbe Pressungen ausgesetzt ist, oder wenn Knochensplitter das Gehirn stechen; oder man fand als Ursache eine bewegliche Bleikugel zwischen der harten Hirnhaut und dem Schädeldache eingeschlossen u. s. w.

Er teilt sogar mit, dass solche Epilepsie dadurch geheilt werden konnte, dass aus dem geöffneten Schädel die reizenden Gegenstände entfernt wurden. Dabei hielt er jedoch, wie alle Forscher bis auf Hitzigs berühmte Entdeckung der motorischen Hirnrindencentren, die Hirnrinde für unerregbar.

Auch im Gebiete der Muskellehre hatte Haller schon überraschende Kenntnisse, die wieder in Vergessenheit gerieten. Im Bande IV seiner «Elementa» erzählt er, dass Bertier (1740) sich vorstelle: der thätige Muskel ziehe sich zusammen, indem das Blut ihn befeuchte, «so wie Wasser einen befeuchteten Strick kürzer macht».

Th. W. Engelmann hat 1873 in ganz analoger Weise die Zusammenziehung des Muskels durch Quellung seiner doppelbrechenden Teile erklärt.

Als merkwürdigste Priorität Hallers habe ich aber folgende gefunden: Der verstorbene Königsberger Physiologe v. Wittich veröffentlichte im Jahre 1857 eine lateinische Habilitationsschrift mit dem (übersetzten) Titel: «einige Experimente zum Beweise von Hallers Lehre der eigenen Muskelerregbarkeit.» Darin führt er als Hauptversuch folgenden an: Er spritzt Fröschen Wasser in die Blutgefässe und sieht sie danach in Krampf geraten.

Haller lehrte ungefähr 100 Jahre zuvor in seinen Elementen: Einspritzung von Wasser in ein lebendes Tier — nicht nur in die Arterien, sondern auch in die Venen — erregt krampfhaftes Zittern der Muskeln.

Er führt als früheren Beobachter Duverney an, den Du Hamel erwähnt habe.

Am wenigsten vermutete man bei Haller Kenntnisse der Physiologie der Sinnesorgane.

Der geistreiche, junge Sinnesphysiologe Th. Beer hat über Bau und Function der Fischaugen 1894 wertvolle Beobachtungen veröffentlicht: «Es herrscht — sagt er — bei den Fischen ein anderes Einstellungsprinzip als im Auge der Landwirbeltiere: Ein glatter Muskel, welcher sich mit seiner Sehne an die Linse, das Objectiv des Fischauges, anheftet, besorgt die Einstellung .... Die Linse wird, wenn das Auge für die Ferne eingestellt werden soll, nach rückwärts gezogen, also der Netzhaut genähert, ganz ähnlich wie in vielen unserer photographischen Apparate zu gleichem Zweck das Objectiv dem lichtauffangenden Schirm genähert werden muss.»

Haller teilt im dritten Bande seiner «Opera minora» seine Beobachtungen über die Accommodation des Fischauges in folgendem Satze mit:

«Die Fische haben einen eignen sehr roten Muskel, welcher seine Blutgefässe aus der Aderhaut empfängt und in dem für ihn bereiteten Ruysch'chen Beutel liegt, den er zusammenziehen und somit das ganze Auge verkürzen kann, so dass der Strahlenkegel von sehr entfernten Puncten doch in der Netzhaut wieder vereint werden kann».

Und sogar vor dem grossen Helmholtz könnte Haller die Priorität beanspruchen in der Vorstellung von der Tonwahrnehmung.

In der 5. Ausgabe der «Lehre von den Tonempfindungen» 1896 findet sich S. 232 folgender allbekannte Satz: «Das wesent-«liche Ergebnis unserer Beschreibung des Ohres fassen wir dem-«nach dahin zusammen, dass wir die Enden der Hörnerven über-«all mit besonderen, teils elastischen, teils festen Hilfsapparaten «verbunden gefunden haben, welche unter dem Einfluss äusserer «Schwingungen in Mitschwingungen versetzt werden können und «dann wahrscheinlich die Nervenmasse erschüttern und erregen.»

Haller berichtet im 5ten Bande seiner «Elementa» (pag. 293): Am wahrscheinlichsten hielten es die berühmten Männer: Duverney, Boerhave, de Mairan, Nollet, Cotunnus, Musschenbroeck, dass jene

membranöse Spirallamelle mit ihren zwischen beiden Blättern verlaufenden Nerven . . . . . eine Vorrichtung darstelle, welche unzählige Saiten enthielte: . . . sowohl sehr lange für tiefe Töne passend, als auch sehr kurze mit höchsten Tönen harmonierende und dass durch deren Erzitterungen: der Seele die Töne unterschieden vorgestellt werden . . . . Es sei also die Spirallamelle das wichtigste Hörorgan.

Wer in Hallers Werken sucht, wird noch viele Beobachtungen finden, die späteren Entdeckern unbekannt geblieben sind.

Aber darum darf man die Fortschritte der Physiologie, welche um die zweite Hälfte des vorigen Jahrhunderts anhoben, nicht unterschätzen. Die messenden Versuchsweisen der neueren Physik haben mehrere Zweige unserer Wissenschaft in die Reihe der exacten Fächer gerückt. du Bois-Reymonds Elektrophysiologie machte nach Methode und Resultaten Epoche. Gegenüber den Helmholtz'schen Messungen der Fortpflanzungsgeschwindigkeit der Erregung im Nerven erscheinen, die naturphilosophischen Speculationen von Hallers Zeitgenossen, die er uns mitteilt, phantastisch. Man nahm ein Nervenfluidum an, welches aus den kleinsten Blutgefässen des Gehirns zu den Muskeln und von den empfindlichsten Teilen zum Sitze des Bewusstseins fliesse und stellte sich vor, dass der Strom desto schneller sei, je enger die Röhren. Weiter nahm man an, dass die Herzkraft auch das Fluidum in den Nervenröhren treibe und dass im gleichen Verhältnisse wie ein Nervenröhrchen enger sei als die grösse Schlagader der linken Herzkammer, das Nervenfluidum schneller ströme als das Blut. So berechnete man, von vagen Schätzungen ausgehend, die Geschwindigkeit des Nervenprinzips auf 50 Meter (nach Haller)[1], oder 2500 oder 10800 oder 19200000000 Meter in einer Sekunde. Dabei machte Haller wohlbegründete kritische Betrachtungen darüber, wie ungemein dünn ein in engsten Röhrchen so schnell fliessender Stoff sein müsse und hält ihn für ein dem Feuer ähnliches Element.

Die Function der Nerven hat Haller, vom Standpuncte seiner Irritabilitätslehre aus, vielfach untersucht. Er stellte durch

[1]) Durch seltsamen Zufall ist diese Zahl nahezu die von Helmholtz gefundene.

Versuche fest, dass diejenigen Teile, deren Nerven durchtrennt wurden, gefühllos und gelähmt sind. Er fand, dass der periphere gereizte Nervenstumpf die zugehörigen Muskeln zur Zusammenziehung bringt; dass aber durch die umschnürte Nervenstelle kein Reiz hindurch geleitet wird, so dass Reize oberhalb keine Bewegung, unterhalb keinen Schmerz verursachen. So war er ganz nahe der Entdeckung, welche Charles Bell unsterblich gemacht hat: dass verschiedene Nerven die Bewegungs- und die Empfindungs-Antriebe leiten. Aber, obwohl er den Zwerchfellnerven oft prüfte, wollte er doch nicht bemerken, dass dieser ein Bewegungsnerv, aber kein Empfindungsnerv sei. In seinen Elementa physiologiae (Tom. IV, pag. 391) steht der kategorische Satz: «Verum nullus, quod ego norim, nervus datur, qui moveat neque sentiat una.» (d. h.: Es giebt, soviel ich weiss, keinen Nerven, der bewege und nicht zugleich empfinde.) So weist er die im Altertume gültige Lehre von der verschiedenen Wertigkeit der Nerven entschieden zurück.

Haller leitet in seinem akademischen Vortrage: «von den empfindlichen und reizbaren Teilen des menschlichen Körpers» sein berühmtes System mit folgenden Definitionen ein: «Denjenigen Teil des menschlichen Körpers, welcher durch ein Berühren von aussen kürzer wird, nenne ich reizbar.»

„Empfindlich nenne ich einen solchen Teil des Körpers, dessen Berührung sich die Seele vorstellt."

„Unempfindlich nenne ich hingegen die Teile, ... durch die kein Zeichen eines Schmerzes ..... erreget wird."

Er ist stolz darauf nachgewiesen zu haben, dass das „Knochenhäutchen" unempfindlich. Er sagt: „Die Ärzte, Zergliederer und Wundärzte, welche anders denken und ihre Meinung von den Alten her haben, werden mir vergeben, dass ich ihnen hier widerspreche: sie werden das, was ich hier behaupte und das fast wider die Meinung des ganzen menschlichen Geschlechts ist, nicht verwerfen, wenn sie den Ursprung der angenommenen Meinung in Erwägung ziehen."

Den „reizbaren" Muskel hält er aber zugleich für empfindlich, „ob er wohl diese Eigenschaft viel mehr von den Nerven, als von sich selber hat."

Er verwahrt sich ausdrücklich dagegen, Teile für reizbar zu halten, die nur empfindlich sind, obwohl er „die Reizbarkeit von berühmten Männern solchergestalt annehmen gesehen habe, dass sie auf diese Wirksamkeit der Fasern ein fast allgemeines System der Bewegungen in dem menschlichen Körper gebauet, und alle Verrichtungen der Fasern, der Gefässe, der Nerven, der Muskeln, kurz der ganzen menschlichen Maschine von dieser Reizbarkeit einzig hergeleitet haben."

Er verwahrt sich auch energisch gegen die Annahme decentralisierter Seelenteile. Er sagt: „Des Robert Whytts teilbare Seele hat die Notwendigkeit eines Lehrgebäudes veranlasst und den Mann gezwungen sie in so viele Teile zu spalten, als dem Zergliederer Muskeln oder Teile der Eingeweide von dem menschlichen Körper abzuschneiden beliebt hat."

Haller misst abgetrennten Körperteilen auch nicht Spuren seelischer Eigenschaften zu. Er sagt: „Dieser abgeschnittene Finger, diese abgerissene Muskel wird nicht von meiner Seele, nicht von einem Teil derselben bewohnt ..... Mein Wille, mein Gedächtnis, meine Einbildungskraft, mein Vermögen zu urteilen bleiben (auch ohne den Finger) noch vollkommen ..... dieser unverstümmelte Willen aber kann nun nicht mehr in diesem Finger wirken: und gleichwohl bleibt dieser Finger reizbar. Die Reizbarkeit hängt also weder von dem Willen noch von der Seele ab." .... „Die Nerven scheinen nur so viel zur Bewegung der Muskeln beizutragen, dass sie den Willen der Seele auf denjenigen Teil bringen, welcher bewegt werden soll; und dem vermehren und erwecken sie, — diese Vermehrung mag nun geschehen wie sie will — die natürliche Kraft der Fasern, dadurch dieselben sich zu verkürzen streben!"

Der Physiologe Engelmann lässt auch gegenwärtig wieder in ganz ähnlicher Weise auf den Herzmuskel gewisse Herznerven wirken, die er „positiv-inotrope" nennt.

Haller kannte und beschrieb im 8. Bande seiner „Elementa" ganz eingehend die Vererbung, auch von Charaktereigentümlichkeiten von Mutter und Vater durch Ei- und Samenzelle, folgert aber daraus nicht die Verteilung von Seeleneigenschaften auf Zellen.

Reil, der 1796 das „Archiv für die Physiologie" begründete, leitet dasselbe mit seiner berühmten Abhandlung „Von der

Lebenskraft“ ein. Dort (S. 83) verwirft er Hallers Einteilung in folgender Auseinandersetzung: „Wenn wir die Empfänglichkeit tierischer Organe für Reiz, nach den Erscheinungen, die der Reiz erreget, Reizbarkeit (irritabilitas), wenn er Bewegungen, Empfindlichkeit (sensibilitas), wenn er Empfindungen erregt, benennen: so fehlt uns eine Benennung für diese Eigenschaft tierischer Organe im allgemeinen.“ .....

„Wie nennt man die Erregbarkeit in Organen, die weder Muskeln noch Nerven sind?“ ..... „Um diesen unnützen Streitigkeiten auszuweichen, werde ich mit dem Worte Reizbarkeit, Erregbarkeit (irritabilitas, incitabilitas) die Empfänglichkeit tierischer Organe für Reiz überhaupt bezeichnen und die specifische Reizbarkeit nach den Organen in welchen sie stattfindet: Nervenreizbarkeit, Muskelreizbarkeit, Reizbarkeit der Gefässe, der Drüsen, des Herzens, des Magens u. s. w. benennen.“

Reil hat damit — im Gegensatze zu Haller — eine Decentralisation der Körperorgane proclamiert. Er sagt: „Der ganze Körper besteht aus mehreren grossen Gliedern; jedes Glied wieder aus Muskeln, Gefässen, Nerven; der Muskel wieder aus Häuten, Fasern, Gefässen. Welch eine künstliche und zusammengesetzte Mechanik!“

Johannes Müller warnt in der ersten Auflage seines berühmten Handbuchs der Physiologie (Bd. I, S. 48) davor, Hallers Irritabilitätsbegriff zu verallgemeinern. Er sagt: „Einige verwirrte Schriftsteller haben diesen Begriff von Irritabilität zu einer Formel für willkürliche Fictionen gemacht, so dass man sogar von einer Irritabilität in den Nerven gesprochen hat.“

Noch im Jahre 1835 galt für Johannes Müller der dunkle Lebenssatz von Kant: „Die Ursache der Art der Existenz bei jedem Teile eines lebenden Körpers ist im ganzen enthalten, während bei toten Massen sie jeder Teil in sich selbst trägt.“

Es ward Licht, als der Gottbegnadete Entdecker Theodor Schwann im Jahre 1838 unter Johannes Müllers Leitung „mikroskopische Untersuchungen über die Übereinstimmung in der Structur und dem Wachstum der Tiere und Pflanzen“ vollendet hatte. „Nach Schwanns Entdeckung bestehen alle Gewebeteile der Tiere, anfänglich beim Embryo, überall aus den Pflanzenzellen analogen Zellen.“

. . . . . „Die Zellen der Tiere und Pflanzen besitzen als Bildungsteile aller Gewebe und des Keimes selbst ein eigenes Leben innerhalb des Ganzen. Sie entstehen, erzeugen ihresgleichen in sich oder um sich und oft sieht man unter dem Mikroskope mehrere Generationen von Zellen zusammen, die Mutterzellen mit der jungen Brut, den jungen Zellen ausgefüllt und diese wieder noch jüngere Zellen oder junge Kerne enthalten, wie in den Knorpelzellen. Diese Zellen sind nun auch die Träger der wirksamen Kräfte in dem Lebensprozess; sie besitzen eine metabolische Kraft die ihnen naheliegenden Stoffe zu verwandeln; . . . . oft auch verwandeln sich die primitiven Zellen in andere Formen, durch Verlängerung in Fäden, wodurch die Zellgewebefäden entstehen, oder durch Vereinigung mehrerer Zellen zu Cylindern, wie bei den Muskeln und Nerven.“ [1])

Brücke bezeichnete (1861) die Zellen als „Elementarorganismen“, „deren Complication wir zwar insofern nicht mit der der Tiere vergleichen können, als wir bis jetzt kein Recht haben anzunehmen, dass sie sich wieder aus zahllosen, kleinen Organismen zusammensetzen, von denen wir aber immerhin zugeben müssen, dass sie einen höchst kunstvollen Bau darstellen, dessen wesentliche architektonische Elemente unserem Blicke vollständig entzogen sind.“

Wie divergent ist der Weg zu dieser einheitlichen Erkenntnis von demjenigen der dualistischen „Haller'schen Ideen“ von Erregbarkeit und Empfindlichkeit.

Haller schrieb: „Da Bœrhave die Nerven für den ersten wahren Grundstoff des menschlichen Körpers angenommen hatte, so durfte er nicht viel weiter gehen, zu bejahen, dass kaum ein Teilchen des menschlichen Körpers sei, welches nicht empfinde oder sich bewege: und diese Meinung, wider welche ich anderwärts Verschiedenes erinnert habe, ist fast durch ganz Europa angenommen worden.“

„Die einfachen Teile des menschlichen Körpers sind die Nerven, die Schlagadern, die Blutadern, die kleinen Gefässe, die Häute, die Muskelfasern, die Fasern der Sehnen, der Bänder, der Knochen und das zellichte Gewebe.“ . . . . .

---

[1]) Johannes Müllers Handbuch der Physiologie. Bd. IV, S. 45.

„Da die Muskelfaser aus einer Gallerte, oder aus einem Leim und aus erdichtem Grundteilen besteht, so fraget sichs, ob die reizbare Kraft in dem Leim oder ob sie in der Erde ihren Sitz habe? Dass sie eher in dem Leim ihren Sitz haben möge ist wahrscheinlich, weil derselbe eine Neigung sich zu verkürzen hat, und wenn man ihn zieht wieder zurückfährt."

Haller weist Stahls Lehre von der alles erregenden Seele zurück, aber er spricht gar nicht über die Bekenner einer Lebenskraft. Diese ist auch keineswegs immer so definiert worden, dass sie vom biologisch mechanischen Standpunkte aus mit Verachtung zurückgewiesen werden müsste.

Reil sagt (1796) in seiner früher erwähnten Abhandlung: „Lebenskraft deutet das Verhältnis mehr individualisierter Erscheinungen zu einer besonderen Art von Materie an, die wir nur in der belebten Natur, bei Pflanzen und Tieren treffen."

„Physisch wirkt alles in der Körperwelt: auch die belebte organische Materie und alle Kräfte lassen sich zuletzt sämtlich auf Verschiedenheit der Grundstoffe und auf eine einzige allgemeine Eigenschaft derselben, auf Wahlanziehung zurückführen."

„Worte sind willkürliche Zeichen unserer Begriffe und es kommt nur darauf an, den Begriff genau zu bestimmen."

„Alle Hypothesen über die Natur jener (in den Nerven wirkenden) Kräfte sind ebenso unnütz, wie in der physischen Astronomie Hypothesen über die Natur der Schwere."

«Hypothesen können in gewissen Fällen nützlich, ja oft notwendig sein, aber niemals solche, wodurch man die Natur von Grundkräften erklären will. Diese sind Götzen die man dulden kann ..... zum Spielwerke, oder zum Beweise der Geschicklichkeit des Künstlers, welche aber verwerflich werden, sobald man sie zum Gegenstande religiöser Verehrung macht. Immerhin mögen sie noch so grosse Meisterstücke, mit einem noch so grossen Aufwande von Genie verfertigt sein, sie bleiben doch in diesem Falle schädlich. Denn ein Idol ist ein Idol, es mag von einem stupiden Feuerländer geschnitzt, oder aus den Händen eines Phidias hervorgegangen sein.»

Haller will (Bd. IV, S. 514) nach der Ursache der Bewegungsmacht, welche der Muskelfaser innewohnt, nicht forschen, ist aber

überzeugt, dass sie weder mechanische noch physikalische (wie eine tote Faser) Kraft habe. «Vis viva musculo propria est» (S. 453). (Die lebendige Kraft ist dem Muskel eigentümlich.) Den Effect der Muskelbewegung sehen wir: «motus naturam ignoramus» (S. 560). (Die Natur der Bewegung kennen wir nicht.) «Von dem, was sich nicht mit dem Messer oder dem Mikroskop entdecken lässt, wage ich nicht gern Mutmassungen, und enthalte mich, dasjenige zu lehren, was ich selbst nicht weiss,» sagt der charaktervolle Gelehrte und fügt hinzu: «Es ist eine stolze Art der Unwissenheit, andere leiten zu wollen, wo man selbst nichts sieht.»

Er würde sich wohl verwahrt haben, wenn man ihm prophezeit hätte, dass in seinen «Ideen» die Cellularphysiologie oder gar die Theorie der specifischen Sinnesenergien enthalten sei.

Haller beschreibt im fünften Bande seiner «Elementa» genau die Lichterscheinungen, welche durch Druck oder Stoss auf das Auge hervorgerufen werden können. Er sagt: «Es ist ein eigentümliches und nützliches Zeugnis dafür, dass unser Geist ähnliche Sensationen nicht zu unterscheiden vermag, oder die Wirkung einer wenig bekannten Ursuche, der mehr bekannnten zuschreibt. Der Eindruck äusseren Lichts ist der Netzhaut des Auges mehr bekannt als der Eindruck durch einen harten nicht leuchtenden Körper . . . . . Die Eindrücke der Sinne werden durch das Nervenfluidum zum Sitze der Seele geleitet . . . . . Die «secundären Qualitäten» der Körper (Cartesius, Locke etc.) werden «relativo modo» von uns wahrgenommen und als Farben, Töne, Geschmack bezeichnet, die man nach Gestalt, Bau und Molecularbewegung verschieden auffasst. Aber unsere Sinne malen uns nicht die Qualitäten der Dinge.

Wie anders schon sein späterer Gegner Reil: «Ein Reiz kann in einem Organe nur solche Erscheinungen, die der Natur des Organs angemessen sind, erregen.» . . . . .

«Die Erregung ist specifisch in jeder besonderen Gattung von Organen.»

Johannes Müller schuf, unbeeinflusst von Haller und von Reil, seine Sinnesphysiologie. In den Sätzen V und VII des 5. Buches seines Lehrbuchs giebt er die wichtigsten Definitionen seiner Lehre:

«V. Die Sinnesempfindung ist nicht die Leitung einer Qualität oder eines Zustandes der äusseren Körper zum Bewusstsein, sondern die Leitung einer Qualität, eines Zustandes eines Sinnesnerven zum Bewusstsein, veranlasst durch eine äussere Ursache, und diese Qualitäten sind in den verschiedenen Sinnesnerven verschieden, die Sinnesenergieen.» (Bd. II, S. 254.)

«VII. Ob die Ursachen der verschiedenen Energieen der Sinnesnerven in ihnen selbst liegen, oder in Hirn- und Rückenmarkteilen, zu welchen sie hingehen, ist unbekannt, aber es ist gewiss, dass die Centralteile der Sinnesnerven im Gehirn, unabhängig von den Nervenleitern, der bestimmten Sinnesempfindungen fähig sind.» (S. 261.)

Um das Verdienst eines Entdeckers zu beurteilen, muss man sich in die Anschauungen seiner Zeit vertiefen.

«Was ihr den Geist der Zeiten heisst, das ist im Grund der Herren eigener Geist, in dem die Zeiten sich bespiegeln.»

Ein Kind vermag in seiner heimischen Gegend zu geleiten; doch dem Fremdling die Wege so zu beschreiben, dass er nicht fehlgehen kann, ist eine schwere Führerkunst.

Harvey hat 9 Jahre gezögert seine grosse Lehre vom Kreislaufe des Blutes zu veröffentlichen (1628), bis er sicher war, alle Einwände entkräften zu können. Erst hat man seine Lehre bekämpft und später seine Priorität. Noch in den letzten Jahrzehnten hat man drei Männern als den Entdeckern des wichtigsten Lebensvorganges Statuen errichtet: Servets (1553) Standbild in Madrid, rühmt den Spanier, Pisa und Rom verewigten Cesalpino (1583), als wahren Entdecker des Blutkreislaufes; Harveys Monumente aber stehen zu London, zu Hempstead und in seiner Vaterstadt Folkestone.

Dr. Bergson schrieb sogar Dante die Entdeckung des Kreislaufs zu. Wie verführerisch ist es, mit späteren Kenntnissen, verschwommenen Vorstellungen feste Formen zu geben!

Der gewissenhafte Historiker Haller hielt sich von solchen Imputationen frei. Seine Wahrhaftigkeit und Selbstkritik offenbart er in folgenden Sätzen seiner Vorrede zum letzten Bande seiner «Elementa»: «Wenn im langen Werke auch Irrtümliches geblieben ist — und warum sollte dies nicht — so gestehe ich,

dass dies meiner Aufmerksamkeit entgangen ist. Niemals aber möge man glauben, dass ich mit Wissen und Willen dem Leser imponieren wollte, dem zu Liebe ich so grosse Arbeit unternommen habe.»

«Fallere (enim) turpe, errare humanum est.» (p. XXII) «Täuschen ist schimpflich, irren menschlich.»

Glücklich schätzen wolle er sich, wenn sein Leben im Suchen des Wahren für sein Jahrhundert nicht vergeblich gewesen sei.

G. Sidler.

(Eingereicht den 15. September 1902.)

Zur Theorie des Kreises, u. a.

1. Die Paare konjugierter Durchmesser einer Ellipse bilden ein involutorisches Strahlsystem. Wird daher durch den Mittelpunkt O einer gegebenen Ellipse ein beliebiger anderer Kegelschnitt gelegt, so gehen die Sehnen dieses letztern, welche die zweiten Schnittpunkte je eines Paares konjugierter Durchmesser der gegebenen Ellipse mit diesem Kegelschnitte verbinden, durch einen nämlichen Punkt. Nimmt man für diesen zweiten Kegelschnitt einen Kreis, so lässt sich auf diesen Satz eine einfache Lösung gründen der

Aufgabe: Gegeben nach Grösse und Richtung zwei konjugierte Durchmesser AA' und BB' einer Ellipse: man finde die Richtungen der Axen.

Lösung[1]). Wir ziehen (Fig. 1) die Geraden BA' und BA, und durch den Mittelpunkt O der Ellipse parallel zu diesen Geraden die Strahlen $O\gamma$ und $O\delta$, so liegt auf diesen Strahlen ein zweites Paar konjugierter Durchmesser der gegebenen Ellipse. Wir legen nun durch O einen beliebigen Kreis, so werde dieser von OA und OB noch in α und β, und von $O\gamma$ und $O\delta$ noch in γ und δ getroffen. Die Kreissehnen $\alpha\beta$ und $\gamma\delta$ mögen sich in J schneiden, und es sei u v der durch J gehende Durchmesser des Kreises, so liegen die Axen der gegebenen Ellipse auf O u und O v.

Um auch *die Grösse der Axen* zu erhalten, ziehe man durch B zu OA eine Parallele, welche O u in T schneide, und schlage über OT als Durchmesser einen Halbkreis. Die durch B senkrecht zu O u gelegte Gerade treffe diesen Halbkreis in k, und die durch B parallel zu O u gelegte Gerade schneide O k in l, so stellen $Ok = a$ und $Ol = b$ die gesuchten Grössen der beiden Halbaxen dar.

[1]) Vgl.: L. Rippert: Archiv der Math. Neue Folge III, p. 54.

2. Suchen wir den Hilfsatz, auf den die obige Lösung sich stützt, auch zu beweisen, ohne die Theorie der involutorischen Strahlbüschel heranzuziehen. Der folgende Beweis scheint mir einfach genug, um im mathematischen Unterrichte unserer Gymnasien Verwendung zu finden.

Satz: Durch den Mittelpunkt O einer gegebenen Ellipse werde ein beliebiger Kreis gelegt. Ein variables Paar konjugierter Durchmesser der Ellipse schneide diesen Kreis wieder in α und β, so geht die Gerade $\alpha\beta$ durch einen festen Punkt J.

Beweis (Fig. 2): Die halben Axen der gegebenen Ellipse seien $OA = a$ und $OB = b$; wir nehmen dieselben zu Koordinatenaxen, und es sei die Gleichung irgend eines durch den Mittelpunkt O der Ellipse gehenden Kreises

$$x^2 + y^2 = u\,x + v\,y.$$

Wir betrachten zunächst zwei ausgezeichnete Paare konjugierter Durchmesser der Ellipse; 1) die beiden Axen und 2) die beiden einander gleichen konjugierten Durchmesser. Die Axen der Ellipse mögen den Kreis wieder in α und β schneiden, so hat man $O\alpha = u$, $O\beta = v$; die Kreissehne $\alpha\beta$ geht durch den Mittelpunkt M des Kreises.

Ergänzen wir nun AOB zum Rechteck AOBC, und AOB′, wo $OB' = -b$, zum Rechteck AOB′C′, so liegen auf den Strahlen OC und OC′ die zwei einander gleichen konjugierten Durchmesser der Ellipse; es mögen dieselben den Kreis wieder in γ und in δ schneiden, so ist Bogen $\alpha\delta = \alpha\gamma$, und daher steht die Kreissehne $\gamma\delta$ senkrecht zum Kreisdurchmesser $\alpha M \beta$.

Der Strahl $O\gamma$ hat die Gleichung $y = \frac{b}{a}x$, und die Gleichung des Kreises gibt für den Punkt γ

$$x\left(1 + \frac{b^2}{a^2}\right) = u + \frac{bv}{a}.$$ Wir finden somit:

$$\text{Punkt } \gamma \cdots x' = \frac{a(au + bv)}{a^2 + b^2}, \quad y' = \frac{b(au + bv)}{a^2 + b^2},$$

und wenn wir b in $-b$ umsetzen:

$$\text{Punkt } \delta \cdots x'' = \frac{a(au - bv)}{a^2 + b^2}, \quad y'' = -\frac{b(au - bv)}{a^2 + b^2}.$$

Der Schnittpunkt J von $\alpha\beta$ und $\gamma\delta$ ist die Mitte von $\gamma\delta$, und wir erhalten somit für die Koordinaten von J

$$\text{Punkt J} \cdots x = \frac{x' + x''}{2} = \frac{a^2 u}{a^2 + b^2}, \qquad y = \frac{y' + y''}{2} = \frac{b^2 v}{a^2 + b^2}.$$

Bezeichnen wir mit φ den Winkel AOC, so ist $\operatorname{tg}\varphi = \frac{b}{a}$, und die Koordinaten von J nehmen die Form an

$$\text{Punkt J} \cdots x = u(\cos\varphi)^2, \quad y = v(\sin\varphi)^2.$$

Wir behaupten nun, jede durch den Punkt J gehende Gerade schneide den Kreis M in zwei solchen Punkten α' und β', dass auf den Strahlen O α' un O β' zwei konjugierte Durchmesser der gegebenen Ellipse liegen.

In der Tat, betrachten wir zuerst eine beliebige Gerade $Ax + By = C$, so haben wir für die Schnittpunkte dieser Geraden mit dem Kreise M die Relationen

$$1 + \frac{y^2}{x^2} = \frac{1}{x}\left(u + v\frac{y}{x}\right) \text{ und } \frac{C}{x} = A + B\frac{y}{x}.$$

$$\text{Somit } C\left(1 + \frac{y^2}{x^2}\right) = \left(A + B\frac{y}{x}\right)\left(u + v\frac{y}{x}\right), \text{ d. h.:}$$

$$(Bv - C)\frac{y^2}{x^2} + (Av + Bu)\frac{y}{x} + (Au - C) = 0.$$

Wenn somit (x', y') und (x'', y'') die beiden Schnittpunkte darstellen, so haben wir

$$\frac{y'}{x'} \cdot \frac{y''}{x''} = \frac{Au - C}{Bv - C}.$$

Nun soll die Gerade $Ax + By = C$ durch den obigen Punkt J gehen, so ist $C = Au\cos\varphi^2 + Bv\sin\varphi^2$, und der Ausdruck von $\frac{y'}{x'} \cdot \frac{y''}{x''}$ wird $\frac{(Au - Bv)\sin\varphi^2}{(Bv - Au)\cos\varphi^2} = -\operatorname{tg}\varphi^2$, d. h. wir erhalten

$$\frac{y'}{x'} \cdot \frac{y''}{x''} = -\frac{b^2}{a^2}.$$

Die Strahlen O α' und O β' haben also die Richtungen von zwei konjugierten Durchmessern der gegebenen Ellipse, w. z. z.

3. Als weitere Beispiele des Satzes, *dass wenn durch den Scheitel eines involutorischen Strahlsystems irgend ein Kegelschnitt gelegt wird, die Sehnen, welche die zweiten*

Schnittpunkte dieses Kegelschnittes mit je einem Strahlenpaare verbinden, durch einen festen Punkt gehen, wählen wir:

A) Ziehen wir durch irgend einen Punkt eines gegebenen Kegelschnittes Strahlen parallel zu den Paaren konjugierter Durchmesser dieses Kegelschnittes, so gehen die Verbindungsgeraden der Punkte, wo dieser Kegelschnitt durch ein solches Strahlenpaar wieder geschnitten wird, durch den Mittelpunkt des gegebenen Kegelschnittes.

B) Ziehen wir durch einen Punkt P eines Kegelschnittes zwei zueinander senkrechte Strahlen, die diesen Kegelschnitt wieder in α und β schneiden, so geht die Gerade α β, wenn jener rechte Winkel um den Scheitel P sich dreht, durch einen festen Punkt J.

Wir können den Beweis von *B* auch analog führen wie beim Satze in 2):

Ein Punkt der Ellipse $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ sei $P = (a\cos\varphi, b\sin\varphi)$.

Legen wir durch P erst Parallele zu den Axen, welche die Ellipse wieder in P'' und P' schneiden (Fig. 3), so ist die Gerade P' P'' ein Durchmesser und hat die Gleichung

$$P'P'' \cdots x\,b\sin\varphi + y\,a\cos\varphi = 0.$$

Legen wir jetzt durch P die Tangente und die Normale, so fällt die entsprechende Gerade α β mit der Normalen P u v zusammen, und wir haben, wenn wir $a^2 - b^2 = c^2$ schreiben:

$$P\,u\,v \cdots x\,a\sin\varphi - y\,b\cos\varphi = c^2\sin\varphi\cos\varphi.$$

Für den Schnittpunkt J von P' P'' und P u v erhalten wir aus diesen Gleichungen

$$J \cdots x = \frac{c^2 a\cos\varphi}{a^2+b^2}, \qquad y = -\frac{c^2 b\sin\varphi}{a^2+b^2}.$$

Verschieben wir die Koordinatenaxen parallel zu sich selber und legen dieselben durch P, so gehen die Koordinaten von J über in

$$J \cdots \begin{cases} x_1 = \frac{c^2 a\cos\varphi}{a^2+b^2} - a\cos\varphi = -\frac{2\,a\,b^2\cos\varphi}{a^2+b^2} \\ y_1 = -\frac{c^2 b\sin\varphi}{a^2+b^2} - b\sin\varphi = -\frac{2\,a^2 b\sin\varphi}{a^2+b^2}. \end{cases}$$

Irgend eine durch J gelegte Gerade hat jetzt die Gleichung

$$m\{(a^2+b^2)x+2ab^2\cos\varphi\}-(a^2+b^2)y-2a^2b\sin\varphi=0,$$

woraus $$\frac{y}{x}=m+\frac{1}{x}\cdot\frac{2ab(mb\cos\varphi-a\sin\varphi)}{a^2+b^2}.$$

Die gegebene Ellipse hat in unserm neuen Koordinatensystem die Gleichung

$$b^2x^2+a^2y^2+2xab^2\cos\varphi+2ya^2b\sin\varphi=0,$$

woraus $$a^2\frac{y^2}{x^2}+\frac{2ab}{x}\left(\frac{y}{x}\cdot a\sin\varphi+b\cos\varphi\right)+b^2=0.$$

Für die Schnittpunkte α und β der Ellipse mit jener Geraden kommt also

$$a^2\frac{y^2}{x^2}+\frac{(a^2+b^2)\left(\frac{y}{x}-m\right)\left(\frac{y}{x}a\sin\varphi+b\cos\varphi\right)}{mb\cos\varphi-a\sin\varphi}+b^2=0,\ \text{d. h.:}$$

$$\frac{y^2}{x^2}\cdot ab(ma\cos\varphi+b\sin\varphi)-\frac{y}{x}(a^2+b^2)(ma\sin\varphi-b\cos\varphi)$$
$$-ab(ma\cos\varphi+b\sin\varphi)=0.$$

Für die Richtungskoeffizienten $\frac{y}{x'}$ und $\frac{y''}{x''}$ der Strahlen $P\alpha$ und $P\beta$ gewinnen wir somit $\frac{y'}{x'}\cdot\frac{y''}{x''}=-1$. Diese Strahlen stehen also zueinander senkrecht w. z. z.

Der in B auftretende Punkt J liegt also auf der Normalen des Punktes P und ist der Schnittpunkt dieser Normalen mit dem zu O P in Bezug auf die Axen symmetrischen Durchmesser P' P''. Oder J ist zu P harmonisch in Bezug auf die Schnittpunkte u und v der Normalen von P mit den beiden Axen des gegebenen Kegelschnittes. — Bei der Parabel ist nach Grösse und Richtung $PJ=2Pu$, wenn u der Schnittpunkt der Normalen von P mit der Axe der Parabel.

Wenn P in einen Scheitel A des Kegelschnittes fällt, so ist J zu A in Bezug auf O m harmonisch, wo m das Krümmungszentrum des Scheitels A und O den Mittelpunkt des Kegelschnittes darstellt.

Bezeichnen wir also die den Scheiteln A und B einer gegebenen Ellipse entsprechenden Punkte J mit *A* und *B* (Fig. 4), so ergibt sich uns die folgende *Konstruktion* dieser Punkte:

Wir ergänzen AOB zum Rechteck AOBC und fällen aus C auf AB das Lot Cs, so schneidet dieses die Axen in den Krümmungszentren m und n der Scheitel A und B. Ziehen wir nun durch den Fusspunkt s dieses Lotes eine Gerade parallel zu OC, so schneidet diese die Axen in den gesuchten Punkten A und B. Denn OC wird von den Strahlen s (COBB) harmonisch geschnitten und daher haben wir auch (mO, AA) = — 1 und (nO, BB) = — 1, w. s. s.

Zu irgend einem Punkte P der Stammellipse erhält man jetzt den zugehörigen Punkt J auch wie folgt: Die Figur AOBP klappen wir um AO in AOB′P′ um, so sind AJ und BJ respektive parallel zu AP′ und B′P′ und auch der Strahl OP′ geht durch J. Da PJ die Normale der Ellipse APB im Punkte P, so liegt im obigen auch eine neue Konstruktion der Normalen einer Ellipse in einem gegebenen Punkte.

Kehren wir zu den ursprünglichen durch O gehenden Koordinatenaxen zurück, so erhalten wir aus den Koordinaten von J

$$\text{Ort von J} \cdots \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = \left(\frac{a^2 - b^2}{a^2 + b^2}\right)^2,$$

und ferner, wenn ξ, η die rechtwinkligen Koordinaten des Punktes P darstellen:

$$\text{Strahl OJ} \cdots \frac{x}{y} = -\frac{\xi}{\eta}.$$

Wenn also P die gegebene Ellipse umläuft, so beschreibt J eine konzentrische ähnliche und ähnlich liegende Ellipse, deren Scheitel A und B wir oben konstruiert haben. Diese Ellipse beschreibt J mit entgegengesetzt gleicher Winkelgeschwindigkeit wie P die Stammellipse, so dass die Anomalien von J stets entgegengesetzt gleich den Anomalien von P sind.

Aus der letzten Beziehung folgt auch: *Wenn der Strahl PJ von einer Axe der Stammellipse reflektiert wird, so ist der reflektierte Strahl parallel zur Normalen der Ortsellipse von J im Punkte J.*

Wenn also auf der Stammellipse der Punkt P so liegt (Fig. 5), dass die Normale von P mit jeder Axe einen Winkel = 45° bildet (oder P ein Berührungspunkt der Stammellipse mit

dem umschriebenen Quadrat ist), so ist PJ im Punkte J die Tangente der Ortsellipse von J. Wenn nun P auf der Stammellipse sich unendlich wenig bewegt, so macht J eine unendlich kleine Bewegung auf der Ortsellipse von J und beschreibt also ein Tangentenelement der letztern, d. h. ein Element der Geraden PJ. Der Punkt J ist also jetzt das Krümmungszentrum des Punktes P der Stammellipse, und wir gewinnen den Satz: *Die Ortsellipse von J ist der Evolute der Stammellipse umschrieben. Die Berührungspunkte sind zugleich die gemeinsamen Berührungspunkte beider Kurven mit dem denselben umschriebenen Quadrate und sind die Krümmungszentren derjenigen Punkte der Stammellipse, wo letztere von dem ihr umschriebenen Quadrate berührt wird.*

Um die genannten Punkte zu erhalten, ergänzen wir AOB zum Rechtecke AOBC, und es möge der um O mit dem Radius OC beschriebene Kreis die Axen in D und E schneiden, so ist die Gerade DE eine Seite des der gegebenen Ellipse umschriebenen Quadrates. Füllen wir nun von D auf OC das Lot DK, so ist Dreieck ODK kongruent Dreieck OCA und daher OK = OA. Es liegt somit K auf dem Hauptkreise der gegebenen Ellipse und DK ist die Tangente des Hauptkreises im Punkte K. Füllen wir also aus K das Lot KL auf OA, so trifft dieses die Gerade DE in ihrem Berührungspunkte P mit der Stammellipse. Machen wir jetzt $LP' = -LP$, so schneidet der Strahl OP' die in P auf DE errichtete Senkrechte Puv im Krümmungszentrum J von P oder *im Berührungspunkte der Ortsellipse AJB von J mit der Evolute mJn der Stammellipse.*

Für zwei beliebige sich entsprechende Punkte P und J ist $\frac{OJ}{OP'} = \frac{OA}{OA} = \frac{OB}{OB'}$. Ziehen wir also J$A$ parallel zu P'A und JB parallel zu P'B', so erhalten wir wieder respektive auf OA und OB *die Scheitel A und B der Ortsellipse von J.*

Bezeichnen wir mit ξ, η die rechtwinkligen Koordinaten des Punktes P, so sind die entsprechenden Koordinaten von J:

$$J \cdots x = \frac{a^2 - b^2}{a^2 + b^2} \cdot \xi, \qquad y = -\frac{a^2 - b^2}{a^2 + b^2} \cdot \eta,$$

oder $J \cdots x = \frac{e^2}{2-e^2} \cdot \xi, \qquad y = -\frac{e^2}{2-e^2} \cdot \eta$

wo e die Exzentrizität des Stammkegelschnittes darstellt.

Sei nun $P = (\xi, \eta)$ ein beliebiger Punkt der Ebene, so stellen diese Formeln *eine Abbildung einer beliebigen Figur der Ebene in eine invers ähnliche Figur* dar. Auf dem Strahle OP sei nach Grösse und Richtung $OQ = \frac{e^2}{2-e^2} \cdot OP$, und J sei in Bezug auf die x-Axe der Symmetriepunkt von Q, so ist J das Bild des Punktes P.

Einem durch O gehenden Halbstrahle entspricht der von der Y-Axe reflektierte Halbstrahl. Der Koordinatenursprung O und die unendlich fernen Punkte der x-Axe und der Y-Axe entsprechen sich selber; die unendlich ferne Gerade und die beiden Axen entsprechen sich selber, und zwar entsprechen der positiven und der negativen x-Axe wieder je die positive und die negative x-Axe, hingegen der positiven Y-Axe die negative Y-Axe und umgekehrt.

Legen wir durch den Punkt $P = (\xi, \eta)$ einen Kegelschnitt, dessen Exzentrizität = e, und dessen Haupt- und Nebenaxe respektive auf der X- und der Y-Axe liegen, so ist der P entsprechende Punkt J der gemeinsame Punkt aller Sehnen dieses Kegelschnittes, die von P aus unter einem rechten Winkel erscheinen und wenn P diesen Kegelschnitt umläuft, so umhüllt der Strahl PJ die Evolute dieses Kegelschnittes. Die Normale im Punkte P dieses Kegelschnittes möge die Axen in u und v schneiden, so ist J harmonisch zu P in Bezug auf die Strecke uv.

Ein besonderer Fall tritt ein, wenn der Stammkegelschnitt eine *gleichseitige Hyperbel.* Dann fällt das Bild jedes Punktes der Ebene ins Unendliche und wir erhalten die Sätze: *Legen wir durch irgend einen Punkt P einer gleichseitigen Hyperbel zwei zueinander senkrechte Strahlen, so ist die Verbindungsgerade der Pnnkte, wo diese die Hyperbel wieder schneiden, parallel zur Normalen des Punktes P. Die von den Axen begrenzte Strecke irgend einer Normalen einer gleichseitigen Hyperbel wird vom Fusspunkt dieser Normalen halbiert. Schlagen wir daher um einen Punkt P einer gleichseitigen Hyperbel mit dem Radius PO einen Kreis, der die Axen*

Fig. 1

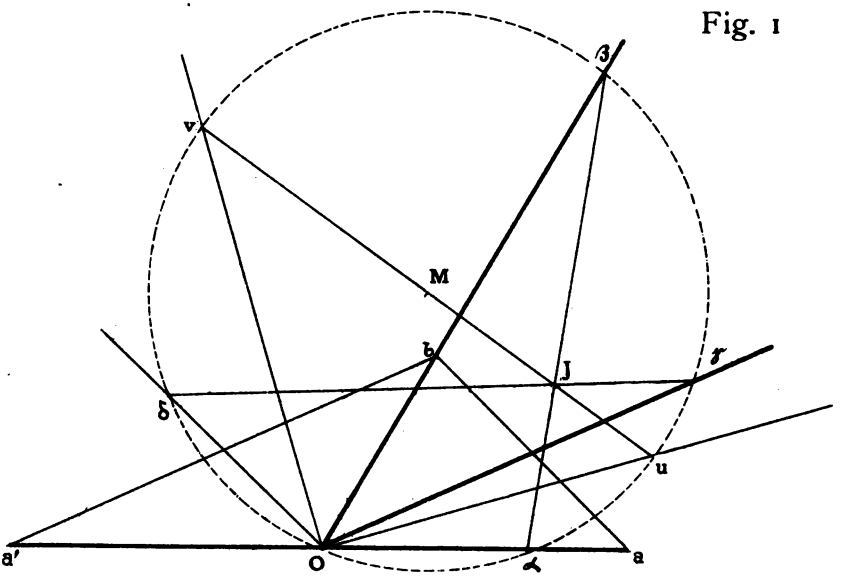
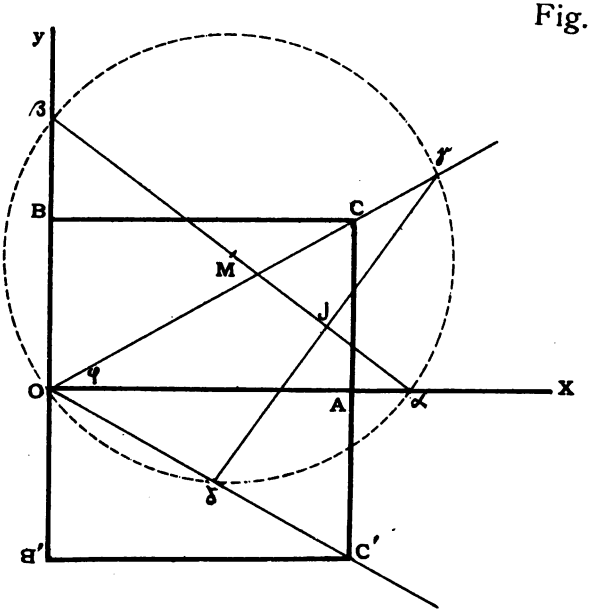


Fig. 2



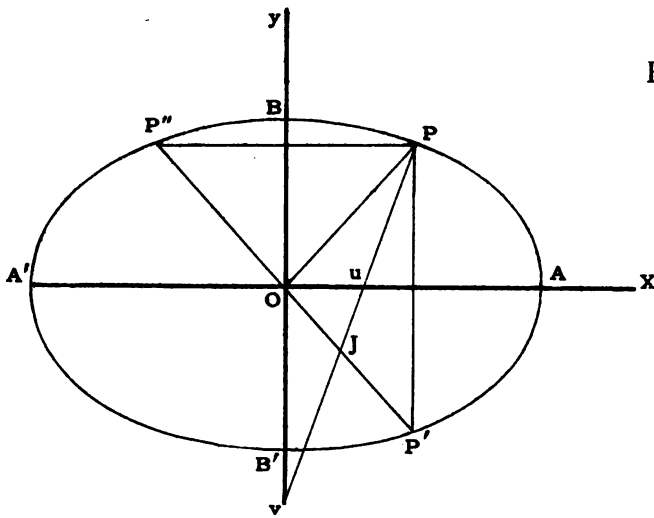


Fig. 3

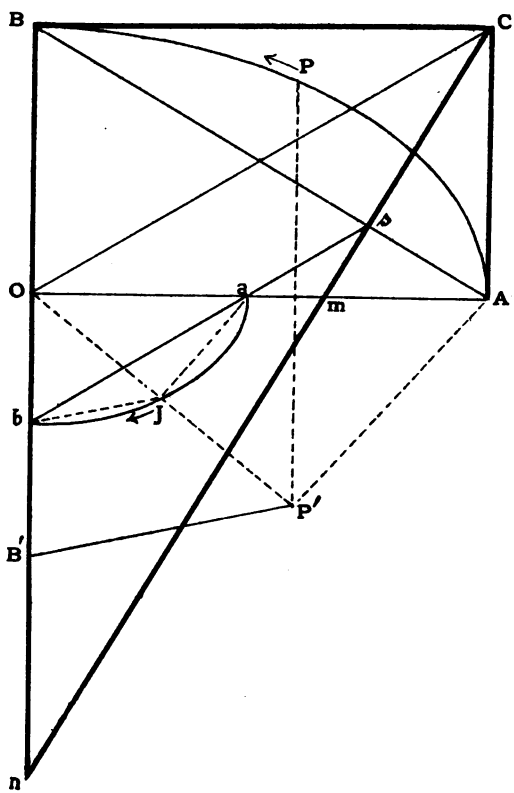
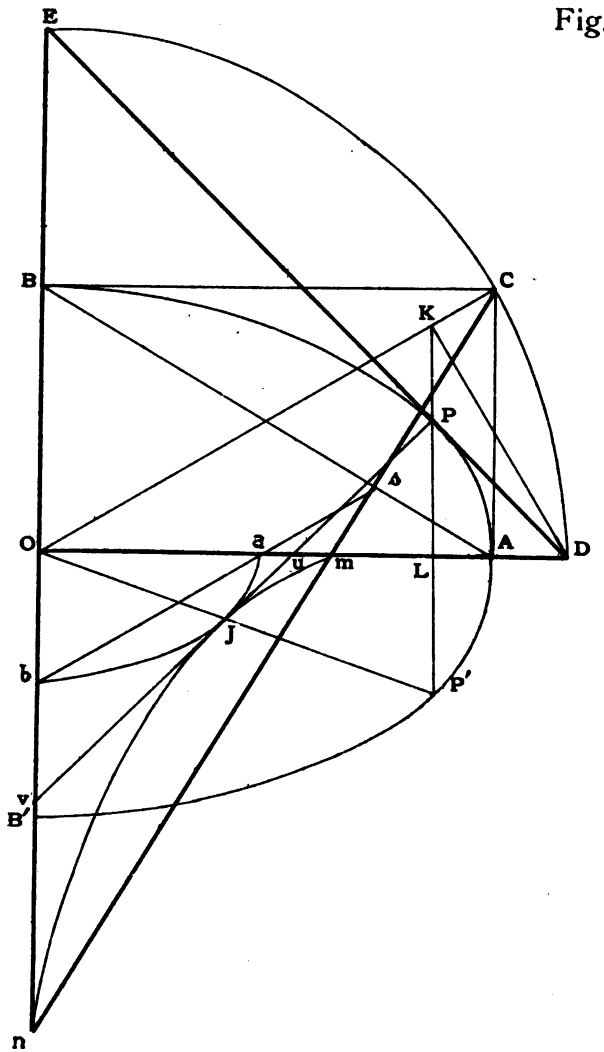


Fig. 4

Fig. 5



wieder in u und in v schneidet, so ist die Gerade u P v die Normale dieser Hyperbel im Punkte P.

In den Endpunkten P und P′ eines Durchmessers sind die Normalen einander parallel. *Ziehen wir daher in einer gleichseitigen Hyperbel parallel zu irgend einem Durchmesser, der die Hyperbel reell schneidet, ein System von Sehnen, oder ein solches System von einander parallelen Sehnen, welche je die beiden Aeste der Kurve schneiden, so erscheinen diese Sehnen von zwei reellen Punkten P und P′ aus je unter rechten Winkeln; diese Punkte P und P′ liegen auf der betreffenden Hyperbel, bilden die Endpunkte eines Durchmessers derselben, und die Normalen in diesen Punkten sind parallel zu dem bezüglichen Sehnensystem. Beschreibt man daher um jene Sehnen als Durchmesser Kreise, so bilden diese Kreise ein Kreisbüschel, das die Punkte P und P′ zu Grundpunkten hat. Betrachten wir dagegen ein System paralleler Sehnen einer gleichseitigen Hyperbel, welche je nur den einen Ast der Hyperbel schneiden, so sind die Punkte P und P′ imaginär, und die um diese Sehnen als Durchmesser beschriebenen Kreise bilden ein Kreisbüschel der zweiten Art, dessen Nullpunkte die Punkte S und S′ sind, wo die zu diesen Sehnen paralleler Tangenten die Hyperbel berühren.* Oder: *In einem Kreisbüschel ist der Ort der Endpunkte eines Systems von einander parallelen Durchmessern eine gleichseitige Hyperbel. Wenn das Büschel der ersten Art, so sind die Grundpunkte P und P′ des Büschels die Endpunkte eines Durchmessers dieser Hyperbel, und die Normalen in diesen Punkten sind parallel zu jenen Kreisdurchmessern; machen wir daher auf einer dieser Normalen $Pu = Pv = PO$, wo O die Mitte von PP′, so gehen durch O und respektive u und v die Axen der Hyperbel. Ist aber das Kreisbüschel der zweiten Art, so sind die Nullpunkte S und S′ des Büschels die Endpunkte eines Durchmessers der betreffenden Hyperbel, und die Normalen in S und in S′ stehen senkrecht zu jenen Kreisdurchmessern; machen wir wieder auf einer dieser Normalen $Su = Sv = SO$, wo O die Mitte von SS′, so gehen durch O und respektive durch u und v die Axen der Hyperbel.*

A. Bohren.

(Eingereicht den 6. Oktober 1902.)

Über das Airysche Integral.

Als mathematischen Ausdruck der Intensität der einzelnen Farben im Regenbogen findet Airy[1]) das nach ihm benannte Integral

$$A = \int_0^\infty \cos \frac{\pi}{2}(x^3 - mx)\,dx.$$

Airy wertet dasselbe schon für die Argumente $m = -5{,}6$ bis $m = +5{,}6$ aus, allerdings noch auf umständlichem Wege. Infolge der Bedeutung, die dem Integral in der mathematischen Optik zukommt, ist in erster Linie nach einfachern Auswertungsmethoden gesucht worden. Stokes[2]) bedient sich folgender Formeln

$$A = 2^{\frac{1}{2}}(3m)^{-\frac{1}{4}}\left[R\cos\left(\varphi - \frac{\pi}{4}\right) + S\sin\left(\varphi - \frac{\pi}{4}\right)\right],$$

worin $$R = 1 - \frac{1\cdot5\cdot7\cdot11}{1\cdot2(72\varphi)^2} + \frac{1\cdot5\cdot7\cdot11\cdot13\cdot17\cdot19\cdot23}{1\cdot2\cdot3\cdot4(72\varphi)^4} - + \cdots$$

$$S = \frac{1\cdot5}{1\cdot72\varphi} - \frac{1\cdot3\cdot5\cdot7\cdot11\cdot13\cdot17}{1\cdot2\cdot3(72\varphi)^3} + - \cdots.$$

und $$\varphi = \pi\left(\frac{m}{3}\right)^{\frac{1}{2}},$$

mit deren Hilfe er ausgedehnte Tafeln berechnet.

Die Wurzelwerte der Gleichung $A = 0$ ergeben sich nach ihm aus

[1]) Transact. of the Cambridge phil. soc. 1838. pag. 379.

[2]) Stokes, Math. and phys. papers Cambridge 1883. II vol. p. 332.

$$\frac{\varphi}{\pi} = n - 0{,}25 + \frac{0{,}028145}{4n-1} - \frac{0{,}26510}{(4n-1)^3} + \frac{0{,}129402}{(4n-1)^5},$$

wo $n = 1, 2, 3, 4 \cdots$

und für die Maxima und Minima rechnet er nach einer ähnlichen Formel die 50 ersten entsprechenden Werte von m aus. Für Ausführung von Intensitätsberechnungen[1]) sind die Zahlenwerte des Integrals genügend bekannt; die vorliegende Mitteilung befasst sich auch nicht mit der Beschaffung neuer Zahlenwerte; aber es ist vielleicht von Interesse, zu sehen, wie auch dieses Integral durch Besselsche Funktionen einfach darstellbar ist.

Setzt man

$$\text{I.} = \int_0^\infty e^{\frac{i\pi}{2}(x^3 - mx)} dx$$

$$\text{II.} = \int_0^\infty e^{-\frac{i\pi}{2}(x^3 - mx)} dx,$$

so ist $$\int_0^\infty \cos\frac{\pi}{2}(x^3 - mx)\,dx = \frac{1}{2}(\text{I} + \text{II}).$$

Für das Integral $\int e^{\frac{i\pi}{2}(x^3 - mx)} dx$ wähle man folgenden Integrationsweg: Die Begrenzung eines Kreissektors (mit dem Centrum O, dem Radius R), der durch die x-Axe und eine Gerade, die mit derselben einen Winkel von 30° bildet, begrenzt ist.

Das Integral, über diesen Weg erstreckt, ist nach Cauchy = 0. Längs des Bogens verschwindet es, wenn R unendlich gross wird; somit ist

$$\int_0^\infty e^{\frac{i\pi}{2}(x^3 - mx)} dx = \int e^{\frac{i\pi}{2}(x^3 - mx)} dx \text{ längs OB, wenn B un-}$$

endlich weit vorausgesetzt wird.

$$= \int_0^\infty e^{\frac{i\pi}{2}(ix^3 - mxe^{\frac{i\pi}{6}})} e^{\frac{i\pi}{6}} dx$$

$$= e^{\frac{i\pi}{6}} \int_0^\infty e^{-\frac{\pi}{2}x^3} e^{-\frac{i\pi}{2}mxe^{\frac{i\pi}{6}}} dx.$$

---

[1]) Pernter, die Farben des Regenbogens. Sitzungsberichte d. Akademie Wien 1896, p. 135.

Entwickeln wir nach Potenzen von m, so erhalten wir eine konvergente Reihe von der Form

$$= e^{\frac{i\pi}{6}} \sum_{r=0}^{\infty} \int_0^{\infty} (-1)^r \frac{\left(\frac{i\pi}{2} m e^{\frac{i\pi}{6}}\right)^r}{\Gamma(r+1)} e^{-\frac{\pi}{2}x^3} x^r \, dx$$

da $$\int_0^{\infty} e^{-\frac{\pi}{2}x^3} x^r \, dx = \frac{1}{3} \int_0^{\infty} e^{-\frac{\pi}{2}y} y^{\frac{r+1}{3}-1} dy = \frac{1}{3} \frac{\Gamma\left(\frac{r+1}{3}\right)}{\left(\frac{\pi}{2}\right)^{\frac{r+1}{3}}}$$

so ist $$\int_0^{\infty} e^{\frac{i\pi}{2}(x^3 - mx)} dx = \frac{e^{\frac{i\pi}{6}}}{3} \sum_{r=0}^{\infty} (-1)^r \frac{\left[\frac{i\pi}{2} m e^{\frac{i\pi}{6}}\right]^r \Gamma\left(\frac{r+1}{3}\right)}{\left(\frac{\pi}{2}\right)^{\frac{r+1}{3}} \Gamma(r+1)}.$$

Setzt man in

$$\Gamma(a) \cdot \Gamma\left(a + \frac{1}{n}\right) \cdots \Gamma\left(a + \frac{n-1}{n}\right) = (2\pi)^{\frac{n-1}{2}} n^{-an+\frac{1}{2}} \Gamma(na)$$

$$a = \frac{r+1}{3} \text{ und } n = 3, \text{ so ist}$$

$$\Gamma\left(\frac{r+1}{3}\right) \cdot \Gamma\left(\frac{r+2}{3}\right) \cdot \Gamma\left(\frac{r}{3}+1\right) = 2\pi 3^{-r-\frac{1}{2}} \Gamma(r+1)$$

und

$$I = \frac{2\pi}{3^{\frac{3}{2}}} \left(\frac{\pi}{2}\right)^{-\frac{1}{3}} e^{\frac{i\pi}{6}} \sum_{r=0}^{\infty} \frac{(-1)^r}{\Gamma\left(\frac{r+2}{3}\right) \Gamma\left(\frac{r}{3}+1\right)} \left[\left(\frac{\pi}{2}\right)^{\frac{2}{3}} \frac{ime^{\frac{i\pi}{6}}}{3}\right]^r.$$

Zerlegen wir die Reihe in 3 Partialreihen, entsprechend den Werten von r, die durch 3 dividiert, die Reste 1, 0, — 1 ergeben, so folgt

$$I = \frac{2\pi}{3^{\frac{3}{2}}} \left(\frac{\pi}{2}\right)^{-\frac{1}{3}} e^{-\frac{i\pi}{6}} \sum_{\lambda=0}^{\infty} \frac{(-1)^\lambda}{\Gamma(\lambda+1) \cdot \Gamma\left(\lambda+1+\frac{1}{3}\right)} \left[\left(\frac{\pi}{2}\right)^{\frac{2}{3}} \frac{m}{3}\right]^{3\lambda+1}$$

$$+ \frac{2\pi}{3^{\frac{3}{2}}} \left(\frac{\pi}{2}\right)^{-\frac{1}{3}} e^{\frac{i\pi}{6}} \sum_{\lambda=0}^{\infty} \frac{(-1)^\lambda}{\Gamma\left(\lambda+\frac{2}{3}\right) \Gamma(\lambda+1)} \left[\left(\frac{\pi}{2}\right)^{\frac{2}{3}} \frac{m}{3}\right]^{3\lambda}$$

$$+\frac{2\pi}{3^{\frac{3}{2}}}\left(\frac{\pi}{2}\right)^{-\frac{1}{3}} i\sum_{\lambda=1}^{\infty}\frac{(-1)^{\lambda}}{\Gamma\left(\lambda+\frac{1}{3}\right)\cdot\Gamma\left(\lambda+\frac{2}{3}\right)}\left[\left(\frac{\pi}{2}\right)^{\frac{2}{3}}\frac{m}{3}\right]^{3\lambda-1}.$$

Das Integral II erhält man aus I, indem man i durch $-i$ ersetzt. Führt man die Besselsche Funktion

$$\overset{a}{J}(x)=\sum_{\lambda=0}^{\infty}(-1)^{\lambda}\frac{\left(\frac{x}{2}\right)^{a+2\lambda}}{\Gamma(a+\lambda+1)\cdot\Gamma(\lambda+1)}$$

ein, und bedenkt man, dass $\cos\frac{\pi}{6}=\frac{\sqrt{3}}{2}$, so ergibt sich

$$A=\frac{1}{2}(I+II)=$$

$$=\frac{\pi}{3}\left(\frac{m}{3}\right)^{\frac{1}{2}}\left\{\overset{\frac{1}{3}}{J}\left[\pi\left(\frac{m}{3}\right)^{\frac{3}{2}}\right]+\overset{-\frac{1}{3}}{J}\left[\pi\left(\frac{m}{3}\right)^{\frac{3}{2}}\right]\right\}.$$

Spezialfälle

$$m=0 \qquad \int_0^{\infty}\cos\frac{\pi}{2}x^3\,dx=\frac{\Gamma\left(\frac{1}{3}\right)}{2^{\frac{2}{3}}3^{\frac{1}{2}}\pi^{\frac{1}{3}}}$$

$$m=3 \qquad \int_0^{\infty}\cos\frac{\pi}{2}(x^3-3x)\,dx=\frac{\pi}{3}\left[\overset{\frac{1}{3}}{J}(\pi)+\overset{-\frac{1}{3}}{J}(\pi)\right] \text{ etc.}$$

Wenn auch die vorliegenden Ausdrücke nicht so einfach sind wie die, die bei der Darstellung der Fresnelschen Integrale durch Besselsche Funktionen auftreten, so sind sie doch von einigem Interesse.

J. H. Graf.

Die Ueberschwemmungen des Seelandes und die Korrektionsversuche an der Aare und Zihl im XVIII. Jahrhundert.

(Vortrag gehalten an der Versammlung der bern. naturforsch. Gesellschaft in Neuenstadt im Juni 1902.)

Die ganze Geschichte des Elends und der Kalamitäten, welche die Ueberschwemmungen der Aare im Seeland verursachten, ist noch nicht geschrieben. Thatsache ist, dass die Klagen bis weit in das Mittelalter zurückreichen. Unter den *Schauenburg'schen Karten*, welche sich in der Bibliothek des eidgenöss. Generalstabs in Bern befinden, existirt eine, die die Gegend zwischen den drei Seen, zwischen Zihlbrugg, St. Johannsen und Landeron bei einer grossen Ueberschwemmung darstellt; *alles scheint ein See zu sein*, Sugiez ist ganz im Wasser. Der Plan enthält ein Gradnetz, kann also aus dem Ende des XVI. Jahrhunderts oder Anfang des XVII. stammen. Die Kalamitäten müssen besonders mit *dem Beginn des XVIII.* Jahrhunderts gross gewesen sein. Am 7. Dez. 1702 wurde ein Kredit von 500 Thalern bewilligt, um die Arbeiten an der Zihl bei Brügg anzufangen und bis zur Aare fortzuführen. Es datirt vom 30. Mai 1704 ein „Plan und Grundriss von der Zihl etc." von *Samuel Bodmer*, [1]) *dem bekannten Stücklieutenant*, den er mit Hülfe seiner beiden Disciplen *Emanuel und Samuel Oth* ausgeführt hat. Er war «von der Oberkeit befelchnet aufzusetzen und in Grundriss zu legen». Der Plan wollte zweierlei, *einmal einen neuen Durchbruch der Zihl bei Bürglen*, sodann *einen neuen Durchbruch von einer Aar zur andern, um vom Wirbel aus das Häftli abzuschneiden.* Im September 1704 wurde eine Kommission bestimmt, um einen Augenschein abzuhalten.

[1]) J. H. Graf, Der Kanderdurchstich im Berner Oberland. Schweiz. Rundschau 1892. Graf, Gesch. der Math. u. Naturw. in bern. Landen, III S. 85.

Wohl eine Folge desselben sehen wir darin, dass Bodmer und seine obgenannten Gehülfen einen viel grösseren Plan aufstellten, datirt vom 16. Nov. 1704. Dieser Plan sieht vor:

1) *einen geraden Durchbruch bei Bürglen,*
2) *zwei Durchschnitte bei Gottstadt,*
3) *einen grossen Aaredurchschnitt bei Büren.*

Die ganze Länge der Zihl von Nidau bis zur Einmündung in die Aare, in der sogenannten «Höll», wurde auf 28922 Klafter bestimmt, der Fall beträgt auf diese Länge 20 Fuss 5 Zoll, somit meint Bodmer, hat die Zihl Gefäll genug, die oberen Wasser um ein Namhaftes zu fällen. Vom grossen Wirbel bis gen Büren habe die Aare 4 Fuss 10 Zoll Gefäll, vom Wirbel bis Meyenried, wo die Zihl in die Aare gelangt, 3 Fuss 4 Zoll, also von da bis Büren, d. h. auf eine Distanz von 24,000 Fuss betrage der Fall nur 1½ Fuss. Das Gefäll der Aare von Büren bis Solothurn, d. h. auf einer Distanz von 40,000 Fuss, sei nur 6 Fuss, so dass also das ganze Gefäll von Nidau bis Solothurn 27 Fuss 11 Zoll betrage. Hingegen, sagt nun Bodmer, «steige die Aare in Solothurn bei «Wassergrössenen» auf 17 Fuss, und wenn noch die 6 Fuss Gefäll von Büren nach Solothurn dazu geschlagen werden, so müsse in einem solchen Fall notwendigerweise die Aare mit der Zihl auf eine Höhe von 23 Fuss zurückgeschlagen werden, was bei der Zihl bis nach Brügg hinaufreiche und bei der Aare die grossen Ueberschwemmungen im Seeland verursache. Wenn nun der grosse Durchschnitt bei Büren gemacht werde, der das Häftli abschneide, so werde es dem Wasser ein Grosses helfen, indem es geschwinderen Lauf bekäme, als wenn es in dem grossen Umgang laufen müsste.»

Diesem ausserordentlich wichtigen und ingeniösen Plan, der einen an sich richtigen Vorschlag, welcher fast 160 Jahre später ausgeführt werden sollte, brachte, ist die Horizontallinie (Niveaulinie) der Wasserhöhe bei Nidau und diejenige der grossen Wasserhöhe bei Solothurn beigegeben.

Bodmer spricht von drei Grundrissen, es muss aber einer verloren gegangen sein.

Diesem *wichtigsten Korrektionsvorschlag* machte Büren energisch Opposition und so wurde ein Jahr darauf beschlossen (8. Nov. 1705) «die Vergredung der Aare soll unterlassen werden». Man wollte

sich eben weiter mit kleinen Palliativmittelchen behelfen. 1718 wird ein neuer Ausbruch der Aare zwischen Dotzigen und Büren gemeldet; die von Orpund reichen eine Bittschrift ein, um die Zihl ableiten zu lassen. 1721, im Frühling, brach die Aare bis Niederworben aus, die Wasser gingen bis an die Fenster, und 30 Jucharten des besten Landes wurden zu Grunde gerichtet. Nun war die Not wieder gross. Am 12. März wurde eine eigene *Aaredirektion* eingerichtet[1]), die Mitglieder waren Venner *Rot*, die *Rathsherren Steiger. Thommann*, alt *Stiftsschaffner Düntz* und alt *Landvogt Kirchberger*. Geometer *Reinhard* wurde beauftragt, einen neuen Plan zu entwerfen. Einige Grienräumungsarbeiten wurden unter *Schweizer* vorgenommen. Am 10. November 1722 trafen neue Klagen von Dotzigen und Büetigen ein, welche wieder unzählige Augenscheine, aber weiter nichts hervorriefen. Die Aaredirektion gelangte an ihren Schluss. Ende 1733 drang bei der grossen Ueberschwemmung das trübe Aarewasser durch die Zihl bis in den Bielersee, d. h. die Zihl wurde durch die Wassermassen der Aare so zurückgestaut, dass die Zihl aufwärts floss. Aus dem Jahr 1743, November, datirt ein neuer «Plan des Aaren-Runss von Arberg bis Buettigen-Einung, in Grund gelegt von *Stephan Kocher* von Büren». Im Frühling 1749 traten neue verheerende Ueberschwemmungen ein. Rathsherr Major *Tillier* erhielt den Befehl, die Klagen wegen der Ueberschwemmungen der Gegend des Murten-, Neuenburger- und Bielersees und der Aare in Untersuchung zu ziehen. Ueber das Ganze soll ein *Generalsystema* abgefasst werden, insbesondere sei das Niveau aller Orte genau festzustellen. Des Weitern hatte er den Auftrag, «vernünftige und alte» Leute der dortigen Gegend über die Angelegenheit anzuhören und ihre Meinung zu erkunden. Alle bisherigen Akten wurden ihm zugestellt. Da wäre nun Gelegenheit gewesen, ein rationelles Korrektionsprojekt aufzustellen und durchzuführen, aber die *Idee des Generalsystema*, ein Gedanke, der ja bei der Juragewässer-Korrektion in grossartiger Weise zur Ausführung kam, scheiterte kläglich. Tillier nivellirte mit schlechten Instrumenten und fand als Gefäll von Nidau bis Meyenried 63 Fuss, also fast das Dreifache des Bodmer'schen Resultates von 1704. Sein Gedanke war, es fehle bei Nidau, darum besserte er dort

[1]) Nach dem Rezept: « Ist der Verstand am Ende schon,
Macht man eine Kommission! »

die alten Kanäle aus und machte eine Reihe neuer kleinerer Kanäle, so dass Nidau zu einem kleinen Venedig umgestaltet wurde. Kosten 5000 Kronen. Die Arbeiten wurden 1758 beendigt, *ihr effektives Resultat war Null.* Während dieser Arbeiten brachte das Jahr 1751 wieder besonders grosse Ueberschwemmungen. Die Tillier'schen Arbeiten werden durch zwei Pläne illustrirt: 1. Plan vom Lauf der Zihl 1749/50, wo, wie schon angedeutet, neue Graben, Oeffnung alter Graben, Wegräumen von Grieninseln, Tieferlegen des Zihlbettes vorgeschlagen werden. Eine grössere Ausgabe betitelt: „Plan der Zihl von Nidau bis Meyenried und der Aare von Dotzigen bis Büren von *Anton Tillier*, Major, und *Alb. Knecht.* Kommissarius", bestimmt die Länge der Zihl von Nidau bis Meyenried auf 3640 Klftr. und den Fall wie schon gesagt auf 63′ 5″ 2‴.

Die neue grosse Ueberschwemmung von 1760 veranlasste die Regierung den Wasseringenieur *de Rivaz* zu konsultiren; derselbe fasste die Sache im Grossen und die Korrektion der Gewässer im Zusammenhang auf. Sein Vorschlag ging vorerst dahin, *vom Pfeidwald bis Schwadernau ein neues geradliniges Zihlbett zu graben.* Das Resultat war, dass die Anfertigung neuer Pläne angeordnet wurde, so von Geometer *Brenner*, Juli 1763, kopirt von *Küpfer*, Jan. 1765. Der Plan der *Aare vom Lysswald* an ist besonders deshalb interessant, weil die enormen Verwüstungen angegeben sind, die die vorige Ueberschwemmung im Gefolge hatte. Das Jahr 1771 brachte neue grosse Ueberschwemmungen. Der Wasseringenieur *Mirani* wurde konsultirt, sein Vorschlag ging ebenfalls dahin, ein neues gerades Zihlbett vom *Pfeidwald bis Schwadernau* ausheben zu lassen. Ferner soll der Schuttkegel weggeräumt werden, den die Scheuss in das Zihlbett bei Nidau geworfen hatte. Besonders wertvoll aber ist der «Plan der Zihl und der Aare» von *Hebler*, städtischem Werkmeister aus dem Jahre 1775. Er will 1) einen geradlinigen Durchstich der Zihl von Gottstadt an, 2) ein neues Bett für die Aare beim Häftli und 3) ein neues Zihlbett vom Häftli nach der Reiberen Allmend unterhalb Büren. Seine Idee ist also zuerst die Aare geradlinig zu legen, dasselbe mit der Zihl zu thun und die letztere *geradlinig* und *von der Aare abgesondert* erst unterhalb Büren in die Aare zu leiten. Kosten 87,060 Kronen.

Dass einem solchen durchgreifenden Projekt Widerstand geleistet wurde, ist für sich klar. Büren opponirte, weil es für seinen Wasserzoll fürchtete, auch hätte das neue Zihlbett zum grössten Theil durch Gebiet des Bistums Basel gelegt werden sollen, alles Gründe, die die Regierung am 14. Febr. 1776 veranlassten, vom Projekt zu abstrahiren. Das gleiche Jahr 1776 brachte eine neue grosse und allgemeine Ueberschwemmung, die Veranlassung zu neuen Expertisen gab und Heblers Projekt wieder in den Vordergrund stellte. Allein aus der Gegend selbst erwuchs ihm der heftigste Gegner; *Pagan*, *Landschreiber von Nidau*, bekämpfte es auf die bitterste Weise und stellte die Behauptung auf, dass an allen Uebelständen die Mühle und Walke bei Brügg schuld sei. Angesichts dieser Opposition verzichtete Hebler schwachmüthig auf sein Projekt, er schloss sich den Pagan'schen Ideen an; so wurde mit einem Kostenaufwand von 8015 Kronen die grosse Kiesbank bei Brügg durchstochen, was einige Zeit half, nachher ging das alte Elend von neuem an! Das letzte Plandokument aus dem XVIII. Jahrhundert ist ein Plan der Zihl und des Aare-Flusses von Schwadernau und Busswil bei Büren, gezeichnet von *Fr. Schumacher*. Geometer, 1789. Dieser Plan kommt auf die alte Bodmer'sche Idee zurück, beim Häftli einen Zihl- und einen Aarekanal zu graben. Interessant ist die Anlage einer grossen Schutzschwelle in der dortigen Gegend.

Alle diese Pläne wurden aber nicht verwirklicht, es fehlte der grosse einheitliche Gedanke, welcher das geniale Werk des XIX. Jahrhunderts wie ein rother Faden durchzieht. Die Zeit war noch nicht zur Lösung der Aufgabe reif, und die Dulderzeit der dortigen Bewohner noch nicht zu Ende. Wohl ragen aus der Kleinlichkeit jener Periode einzelne Männer wie *Bodmer*, *Rivaz*, *Mirani*, *Hebler*, weit hervor, aber ihrem Gedankenflug konnte man nicht folgen, es blieb dem vorigen Jahrhundert vorbehalten unter Mithülfe des Bundes, der Kantone und Gemeinden die Jahrhunderte alte Plage der dortigen Gegend zu wenden und eine Aera neuer Entwicklung zu inauguriren.

(Die angeführten Pläne sind im Staatsarchiv Bern; man vergl. auch das Seeland der Westschweiz und die Korrektion seiner Gewässer. Eine Denkschrift von Dr. J. R. Schneider, Bern 1881.)

J. H. Graf

Notizen
zur
Geschichte der Mathematik und der Naturwissenschaft der Schweiz.

Nr. 61 Fortsetzung der Briefe von Micheli an Joh. Jakob Huber und Herrn Bavier in Basel.

A Monsieur Huber le fils a Basle.

Au Chateau d'Arbourg le 2 janv. 1754.

Monsieur,

Il me paroit par celle que vous m'avez fait l'honneur de m'ecrire le 29 Dec^{e} dernier que vous ne combattez guére ma these sur la parfaite sphericité du globe de la terre, car vous vous y bornez a m'objecter sur un article de ma lettre ou pour vous faire voir que la superficie de la terre au niveau des mers n'etait pas la limite de la gravité mais bien le centre de la Terre je vous marquais qu'on pourroit eprouver dans une mine d'Ardinghem sous le niveau de la mer que la pression de l'air y suivroit la loy de la gravité qui augmentoit toujours à mesure que l'on s'approchoit du centre de la Terre et qu'on pourroit encore eprouver dans la mer par la chute d'un corps la meme augmentation. Or vous m'objectez là-dessus, *je ne sais pas d'où vous tirez cette loy la gravité n'augmente pas comme vous pensez. . . . — Les experiences des Academiciens de Perou prouvent que cela n'est pas.*

Je ne vous ai pas specifié, Monsieur, en quoi consistoit cette augmentation parceque nous n'en avons pas des regles bien justes et que les experiences que l'on a faites jusquà présent avec le Baromètre et peut etre encore celles qu'on a faites sur la chute des corps sont fort imparfaites mais quoiqu'imparfaites et meme discordantes elles s'accordent toutes à convenir d'une progression d'hauteur d'air depuis le niveau de la mer jusqnau sommet de l'atmosphere pour chaque ligne du Barometre comme vous le pouvez voir au Ch. 4, Liv. 5, Tom 2 Voiage de Perou, d'où par consequent il sensuit une diminution d'hauteur d'air à mesure qu'on descend plus bas sous un tel niveau et par conseq^{t} un accroissement de la gravité pour chaque ligne du baromètre comme je l'ai dit.

Ainsy si pour obtenir (en montant du bord de la mer audessus) une ligne de diminution au baromètre, il faut monter 80 pieds, il en

faudra descendre moins pour la rencontrer d'augmentation et toujours ensuite de moins en moins.

Mais quand meme cette loy de progression n'aurait pas ici lieu et que l'accroissement de la gravité se feroit dessus et dessous le niveau de la mer toujours egalement d'une ligne pour 80 pieds. Cela n'empecheroit pas que le centre de la Terre ne fut toujours la limite de la gravité puisque les corps les plus pesans tombent vers ce centre autant qu'il est possible qu'il en puisse approcher.

Ainsy l'attraction du centre de la Terre se trouvant de la cause qui opère la pression de l'air sur le baromètre, comme je vous l'ai fait voir, Mr. dans ma precedante, et cette attraction agissant ainsy par un tel moien sur toute la Terre au niveau des mers avec force égale, puisque le baromètre y marque partout 28 pouces, cette force egale temoigne donc partout une distance egale jusques à son principe qui est le centre de la Terre, puisque toute vertu d'attraction diminue par l'eloignement de sa cause et augmente par sa proximité.

D'ailleurs la colonne de l'atmosphere de l'air superieure aux mers, etant par tout egale en poid et en hauteur ainsy que nous en convenons il en resulte encore de là une nouvelle preuve de ma proposition, car si l'attraction du centre de la Terre qui est la cause de la pesanteur de l'air se trouvoit moins forte sous l'equateur qu'au cercle polaire la colonne de l'air sous l'equateur y etant d'egale hauteur y peseroit moins et presseroit par consequent moins le baromètre, mais puisqu'elle le presse egalement comme au cercle polaire la pesanteur y est donc la même et la distance au centre de la Terre par consequent la même.

Il s'ensuit donc clairement de là que le globe de la Terre est parfaitement sphèrique au niveau des mers, car d'abord qu'il est demontré comme je viens de le faire, que la distance de ce niveau des mers au centre de la Terre est partout la même, la parfaite sphericité du globe dont il s'agit s'ensuit manifestement.

Ainsy vous concluez, Monsieur, si vous voulez bien me permettre de vous le dire un peu legerement, que je dois juger que le baromètre ne peut pas servir à indiquer les differentes distances du centre de la Terre, mais qu'il indique uniquement la difference des hauteurs du fluide dont il est environné, puisque en mesurant avec cet instrument la hauteur et le poids d'un pareil fluide au niveau des mers est consequemment la sphericité de la Terre comme je l'ai dit.

Je renvoie au surplus à repondre pour une autre fois au reste de l'honneur de la votre et me borne dans celle-ci à vous prier d'agréer mes complimens au sujet de la nouvelle année et de me croire tres parfaitement, Monsieur, votre tres humble et tres obeissant serviteur

MICHELI DU CREST.

A Monsieur Baviere a Basle.

Au Chateau d'Arbourg, 15 janv. 1754.

Monsieur,

J'ay reçu le Maupertuisiana que vous m'avez renvoié, de même que la cire et les epreuves de la planche du therme dont je vous remercie du tout et prie Mr Albert Louvis de vous rembourser de la cire. Quant à la question que je vous ai proposé sur le baromètre vous me permettrez de vous dire que dans vos diverses lettres que j'ai reçues de vous sur ce sujet vous ne m'en donnez pas l'explication suffisante.

Il s'agit de savoir si dans un tuiau de 4 lignes de diametre interieur le mercure s'y soutient plus haut et de combien que dans un tuiau d'une ligne et demie ou d'une ligne un quart de diametre, je n'ignore pas que le tuiau large de 4 lignes à l'inconvenient des bulles d'air qui se glissent facilement en haut et par conseqt qu'il n'est pas convenable pour le transport, mais cela n'empêche pas qu'on ne doive pas connoitre la difference de l'exhaussement afin de juger ce qu'il y auroit lieu d'ajouter au dessus de l'autre pour raison de sa petitesse ou de cette attraction des parois du verre que le Docteur *Desaguliers* appelle attraction de cohésion.

Il me paroit donc que Mr *Huber*, qui a en quelque façon pris la tâche de perfectionner cet instrument, pourroit tres bien faire à Bale ses experiences sur un tuiau de 4 lignes, sur un de 3, sur un de 2, sur un d'une ligne $^1/_2$ et sur un d'une ligne $^1/_4$ afin de voir de combien ils seront plus hauts les uns que les autres.

Or je crois qu'il faudra s'en tenir apres cela pour l'usage à celui qu'on pourra remplir tout formé courbé par le bas et telle par le haut, ainsy que je l'ai vu pratiquer jusques à celui d'une ligne $^1/_4$ si je ne me trompe. Pour cet effet on ne le pose un peu incliné sur une table et l'on met dans la bouteille qu'on bouche avec bouchon environ un pied de mercure que l'on chasse à petits grains ainsy jusqu'au haut du tuiau, puis on le tient sur le feu pour en purger l'air et apres cela on réitère l'operation jusquà ce quil soit plain. Il faut auparavant tenir les barometres vides dans le fourneau pendant 24 heures, le sommet placé au plus chaud et la sortie à peu pres au moins, afin de les bien purger d'humidité et que le mercure en soit aussy bien purgé et bien purifié. Vous savez Mr au surplus une manière de purifier le mercure, ainsy je n'ajouterai rien à cet égard.

Il ne me paroit point necessaire de soulder deux tuiaux l'un à l'autre pour les comparer puisque cela se peut faire aisément en les mesurant avec une règle de 3 pieds de Roy, l'une après l'autre.

Le variable ou le terme moien du barometre d'ici est à 26 pouces 6 lignes $^1/_2$ et il est actuellement là aujourdhui à 10 heures du matin que j'ecris la presente à celui que j'ai de votre façon.

Le plus haut terme ou je l'ai vu a été à 27 pouces 2 lignes $^1/_4$ et le plus bas à 25 pouces 10 lignes $^3/_4$ et par consequent tout son mouvement est ici de 15 lignes $^1/_2$.

On ne sauroit d'ailleurs, Monsieur, exactement mesurer avec la ficelle que vous m'avez envoiée puisquelle s'etend plus ou moins suivant l'humidité et suivant qu'on le tire plus ou moins fort.

J'ai l'honneur d'être tres parfaitement au surplus, Monsieur, votre tres humble et tres obeissant serviteur

MICHELI DU CREST.

A MONSIEUR BAVIERE A BASLE.

Au chateau d'Arbourg, le 23 janv. 1754.

Monsieur,

J'ay reçu celle que vous m'avez fait l'honneur de m'ecrire du 19 et ou vous me faites part de vos observations du barometre dont il resulte trois lignes de difference du lieu de votre observation à la mienne, or il vous est aisé de savoir combien vous êtes elevé au dessus du Rhin dans son etat moien et à moi combien je le suis de meme au dessus de l'Aar au pied du Chateau et de conclure par consequent la quantité de pieds de pente tant pour l'Aar que pour le Rhin depuis Aarburg jusquà Bale en vertu d'une regle determinnée par des experiences combien il faut de pieds pour operer au Barometre une ligne de diminution.

Le barometre fut ici lundi passé 21 presque au superlatif, car il y montat jusquà 27 pouces 2 lig. $^1/_8$ et je ne l'ai jamais observé plus haut que jusquà 27 pouces 2 lignes $^1/_4$ et comme vous avez sans doute observer le votre pour lors bien exactement il vous sera facile de voir si les 3 lignes de pente s'accordent.

La presente est principalement pour vous prier de me faire refaire une autre copie de ma reponse au 4e tome des leçons de physique de Mr l'Abé *Nolet* celle que vous aviez eu la bonté de me faire faire fut par moi communiquée il y a bien longtems à Mr le Docteur *Zelmater* (Seelmatter)[1]) et l'ayant redemandée il y a un mois parceque j'en avois besoin elle s'est trouvée egarée sans qu'il ait pu la retrouver jusquà present, c'est pourquoi je vous prie de m'en faire faire une autre sur de papier double de celui-ci et dans cette lettre est une demie facille, puis vous en faire paier par Mr *Louvis* et me l'envoier par le messager.

Je vous prie de m'excuser si je ne repond pas si tost sur l'arte des calculs de la planche parceque j'ai de la besogne à quoi je travaille que je ne saurois quitter, mais bientost je reprendrai cette affaire là. En attendant je vous prie de bien faire mes complimens à Mr *Huber* et de lui dire de ma part que puisqu'il ne me repond point sur l'article de la sphericité de la Terre controversé entre nous c'est qu'apparemment il desespère de pouvoir me convaincre par de bonnes raisons.

Je m'attendois qu'il m'auroit objecté l'observation des pendules tant de fais reiterée sous l'equateur, ou entre les tropiques et de la quelle Mr *Newton* et Mr *Huygens* et Mr *Maupertuis* et tant d'autres après

[1]) Wahrscheinlich *Samuel A. Seelmatter*, der 1751 zu Basel mit der Diss. Sistentem morbos circa Tobinium familiares in 4° den med. Doctor sich erworben hat.

eux ont conclu l'applatissement du coté des poles et le renflement sous l'Equateur, mais tous cela seulement en peinture ou en fiction, car le pretendu raccourcissement d'environ une ligne qu'il faut faire au pendule sous l'équateur pour qu'il batte les secondes comme à Paris, est vrai, mais il ne prouve pas le renflement ou l'elevation de 12 à 14,000 toises de plus à la mer sous l'equateur qu'au pole puisqu'il est clair par le barometre que la pesanteur est egale dans l'un et dans l'autre et si parfaitement egale que s'il s'en manquoit seulement 80 pieds on s'en apercevroit au baromètre par une ligne de moins qu'ainsy il n'y a point de parallèle à faire n'y d'opposition à recevoir d'une experience contre l'autre, quand même la conclusion qu'on tire du pendule se trouveroit fondée sur quelque apparence de verité, mais lors qu'on l'examine de près, on n'y decouvre d'autre appui que l'opinion de ces illustres personages et sans qu'ils aient même fait les recherches suffisantes et faciles en semblable cas pour se bien assurer de la veritable cause de ce phenomène qui me paroit provenir de l'humidité ou des vapeurs qui sortent de la Terre en plus grande abondance entre les tropiques que dans le climat de Paris et dans le climat de Paris plus qu'au cercle polaire, et qui epaississant necessairement davantage entre les tropiques qu'à Paris, doivent exiger le raccourcissement dont il s'agit.

Et pour s'en convaincre mettez en Eté à Bale une pendule bien reglée sur le tems moien dans une cave, puis tirez au bout de 8 jours et voiez si elle n'aura pas pour lors retard considerablement. Si elle se trouve avoir retardé, comme je ne doute pas, n'y aura-t-il pas lieu de dire qu'il faut aller bride en main sur ces experiences.

J'ay l'honneur d'être tres parfaitement Monsieur votre tres humble et tres obeissant serviteur

Micheli de Crest.

A Monsieur Baviere a Bale.

Au Château d'Arbourg, le 9 fevrier 1754.

Monsieur,

J'ay tenté l'experience que vous desirez avec la plus grande larme d'hollande que vous m'avez envoiée dans un gobelet d'eau bien gelée autour et j'avois pris des pincettes pour en casser le bout, mais le bout se trouva si ferme qu'il cassa le gobelet et la glace meme en voulant le casser ce dont je ne pus venir à bout, je mis meme le bout de cette larme dans une fente de planches et je ne pus pas venir à bout de le casser.

Ainsy je renonçai à l'entreprise qui auroit été d'ailleurs inutile, parce que pour juger de l'effet dans la glace, il auroit falu avoir une autre larme de même grosseur par la casser dans l'air, et encore en ce cas difficilement on peut faire un juste parallele, puisque suivant que la larme se reffroidit plus ou moins vite, apres etre faite et plus ou moins est grand son effet. Je fis ensuite l'experience de ce que vous apellez

œuf philosophique, mais qu'à Paris on appelle un *petard*, ceux que j'ai vu à Paris etoient du verre pareil aux larmes et six fois plus gros et fesoient aussy six fois plus d'effet, et je crois encore beaucoup plus promtement.

Rien ne presse pour la copie du memoire contre le 4e tome de Mr l'Abe Nolet, il suffit que vous aiez la bonté de la collationer sur votre original, lequel je vous prie de conserver entre vos mains.

Mr *Huber* fait tres bien de faire ces epreuves de tuiau de barometre, il sera convenable encore qu'il examine, si de faire bouillir un peu de tems le mercure dans le tuiau. 1° Ce n'est pas la cause qui le rend lumineux, je le crois aussy parcequ'il se detache pour lors du mercure des particules rougeatres qui se collent au verre.

2° Si cette ebullition ne fait pas que le mercure s'y soutient plus haut qu'il ne feroit sans cela.

Je vous prie de lui faire bien mes complimens et de lui dire qu'apres qu'il aura determiné le calibre interieur du barometre pour le plus commode, que je crois devoir etre d'une ligne ½, s'il a dessein de se rendre recommandable par des experiences à cet egard dans la Repe des lettres par la suite du tems, il seroit à propos qu'il s'informat, si le *mont St. Godart*[1]) n'est pas la plus haute montagne de la Suisse, et si sur ce mont il n'y a pas un couvent et des moines propres à faire les observations du Barometre, ce que je suppose.

En ce cas donc, je dis qu'il seroit bon d'envoier à trois de ces moines trois barometres, afin que les observant pendant deux ou trois ans de suite, ils en pussent connoitre la plus grande elevation et le plus grand abaissement et en marquer le milieu, il faudroit aussy que chaque barometre eut un therme gradué à notre maniere, avec les termes du temperé et de l'eau dans la glace.

L'etat moien du barometre etant ainsy determiné sur le haut du mont, il y pourroit ensuite faire un voiage dans la belle saison avec quelques amis et un grand nombre de barometres portatifs et par ce moien faire comme il faut les experiences convenables pour connoitre la progression et la hauteur du mont sur son pied, ensuite sur Altorff et Bale, etc.; ce dont je pourrai fournir une explication plus ample, mais avant tout doit proceder la parfaite connoissance de l'état moien du barometre sur le haut du mont, et quoiqu'en ce cas ce ne soit pas au sommet, la chose se pourra facilement conclure alors qu'il y iroit par la comparaison qu'on feroit du barometre posé sur ce sommet, avec ceux des moines.

J'ai l'honneur d'etre tres parfaitement

Votre tres humble et tres obeissant serviteur

Micheli du Crest.

[1]) St. Gotthard.

A M. Huber Fils à Bale

Au Chateau d'Arbourg, le 19 fevrier 1754.

Monsieur

Je puis vous assurer que je n'ai trouvé aucune expression choquante dans les lettres que vous m'avez fait l'honneur de m'ecrire ci devant et que je ne trouve nullement mauvais que l'on soit du sentiment opposé au mien, car *tot capita, tot sensus*, n'y qu'on me fasse voir mes erreurs par des raisons vivement poussées, car nous devons tous desirez de les pouvoir connoitre pour nous en deffaire, mais je vous avoue naturellement qu'on ne me fait pas renoncer dans des cas problématiques à mon sentiment n'y par des sophismes n'y par des questions hors du sujet, car cela paroit tendre au contraire à le confirmer, puisque cela paroit supposer le deffaut de bonnes raisons.

Ainsy vous me permettrez bien de vous dire, Monsieur, que dans le 1er cas se rencontre le 1er article de votre lettre du 16. de ce mois, article sur lequel vous me demandez explication en ces termes.

«Puisque vous dites que le barometre indique si facilement les distances au centre de la terre on pourroit vous demander si dans un beau tems quand le mercure du barometre est haut, nous sommes plus loins du centre de la Terre que quand il est bas.

Car je ne vous ai pas proposé, Monsieur, ma preuve du barometr. en tout tems, n'y en vertu de son haut n'y de son bas etat, mais seulement en vertu de son etat moien, ainsy le haut et le bas dont vous me demandez la raison ou l'explication sont hors de ma preuve et ne font rien au fait, trouvez donc bon, Monsieur, s. v. p. que je m'en dispenser

Vous dites dans le commencement de votre lettre que vous avee eu seulement dessein de me faire voir que le barometre ne peut pas servir à determiner la figure de la Terre, mais c'est ce que vous ne m'avez point fait voir, au lieu que je vous ai fait voir que cet instrument observé dans son etat moien à 28 pouces sur toutes les mers prouvoit evidemment legal pesanteur de l'atmosphere de l'air sur toute la surface des mers de la Terre et consequemt l'egale distance de cette surface au centre de la Terre en vertu de l'egalité de cette pesanteuz et par une consequence ulterieure la parfaite sphericité du globe dont il s'agit.

Cette preuve n'est t-elle pas claire et l'instrument qui me la fournit n'est il pas fidele puisqu'il est si juste et si sensible pour cette demonstration que s'il y avoit une erreur ou un manquement seulement de 24 pieds sur la parfaite sphericité que je soutiens du globe de la Terre, il me fourniroit une ligne de plus ou de moins de demonstration, au lieu que les autres instrumens dont on s'est jusqu'ici abuser pour prouver le contraire et dans le premier rangs desquels je met les pendules avec *Newton*: *Et certius* (dit il) *per experimenta pendulorum deprehendi possit, quam per areus geografice mesuratos in meridiano.*

Cet instrument dis-je des pendules ne fournit qu'une ligne de difference sur 12000 toises d'erreur de plus ou moins.

Par consequant donc Monsieur ma preuve du barometre etant mille fois plus sensible et plus sure qu'aucune des plus sures de celles qu'on peut lui opposer, la pretendue sureté que vous croiez voir dans votre proposition parceque j'etois sure de la verité de ma proposition et mille fois plus incertaine que celle que je crois voir dans la mienne.

Quant au 2me article dont vous me demandez l'explication en ces termes.

«D'ou vient qu'un barometre plongé dans l'eau ne doit être enfoncé que de 13 lignes 1/2 pour que le mercure y monte d'une ligne. Je repond que je ne vois pas ny ne peux meme concevoir le raport direct ou indirect que cette question peut avoir avec celle dont il s'agit, car je ne me sers pas dans ma these du barometre pour connoitre ou pour mesurer la pesanteur de l'eau, mais seulement la pesanteur de l'air ainsy comme il ne convient point d'entre mesler ici des questions etrangeres sans necessité puisque cela ne serviroit qu'à embrouiller la question dont il s'agit et à la faire perdre de vue, c'est pourquoi je vous prie de ne pas trouver mauvais que je me dispense d'y repondre jusqu'à ce que vous m'en fassiez voir la liaison indispensable et par consequant la necessité.

Quant à ce que vous m'aprenez d'ailleurs, Monsieur, dans votre lettre sur les experiences nouvelles que vous avez faites sur le lumineux de votre barometre dont vous dites n'avoir pas absolument chassé tout l'air du sommet, je soupçonne que le mercure dont vous vous etes servi renfermoit encore de l'humidité ou bien que la point en dedans du sommet du tuiau n'etoit pas bien arrondi ou bien qu'il y pourroit s'etre introduit en le souldant de la fumée de la lampe, ou bien que le tuiau n'estoit pas bien sec ou bien lisse, car tout cela sont des obstacles qui peuvent retenir de l'air dans cette parties. Cependant je crois en etre venu au bout à plusieurs barometres, d'ailleurs puisque l'on en vient à bout dans les thermometres de mercure, pourquoi n'en viendroit on pas à bout dans les barometres.

Il y a bien apparence aù surplus que les divers mercures dont je me suis servi quoiqu'en apparence moins fluide avoient tous la meme pesanteur puisqu'ils avoient la meme dilatation. Ce plus ou moins de fluidité qui m'a ainsy paru me fut contesté et ne supposait d'ailleurs pour son effet que des globules plus ou moins polis. Or peut etre que la maniere dont j'avois purifié les autres mercures avoit pu contribuer à les rendre tels, je me souviens pas si j'ai pour lors pesé ou non, mais je me flatte de le pouvoir savoir par la suite.

Ce que vous ne savez peut etre pas, Monsieur, à l'egard des globules du mercure c'est qu'ils sont conpressibles et meme avec un tres petit poids, au lieu que ceux de l'eau ne le sont point du tout.

J'ay l'honneur d'etre tres parfaitement, Monsieur, votre tres humble et tres obeissant serviteur MICHELI DU CREST.

A Monsieur Baviere.

Monsieur

J'ay trouvé une planche gravée ou le terme moien du Barometre du *S^t. Godard* combiné par 3 années consecutives d'observation est de 21 pouces 7 lig. 1/4, cela ne suppose pas une bien grande elevation, il est vrai que l'observation du sommet n'y est pas mais qu'elle reste à faire or qu'elle est la plus haute montagne de toute la Suisse c'est ce que vous m'obligerez m'apprendre si vous le pouvez savoir surement, d'ailleurs je me recommande toujours fortement à vos bons offices s'il se peut pour les livres demandez par ma derniere, j'ai l'honneur d'etre au surplus tres parfaitement, Monsieur, votre tres humble et tres obeissant serviteur Micheli du Crest.

A Monsieur Baviere a Bale.

Au Chateau d'Aarbourg, le 3 mars 1754.

Monsieur,

J'ay recu hier au soir celle que vous m'avez fait l'honneur de m'ecrire du 1er de ce mois, avec le 1er tome des *Acta Helvetica* imprimé à Bale en 1751, dans lequel se trouve la table de progression du barometre suivant les diverses hauteurs calculée par Mr *Bouguer* et que Mr *Bernoulli* a mise au jour dans un memoire contenant diverses reflexions sur la physique generale, memoire qui en annonce la suite dans le 1er volume futur, et qui sans doute n'a pas encore paru, puisque dans votre lettre vous me demandez mon avis, savoir s'il ne conviendroit pas d'inserer dedans quelque chose sur le mercure et sur le degré de chaleur necessaire pour faire eclore les œufs, vers à soye, et sur celui du sang humain ; vous ajoutez encore M^r dans votre lettre qu'un ami vous a preté seulement pour 8 jours ce livre d'ou il s'ensuivroit à la lettre que je devrois vous le renvoier mercredi prochain; cependant ce ne doit pas etre un livre rare à Bale puisqu'il est imprimé en 1751, et que le second tome annoncé n'est peut-etre pas encore sous la presse, ainsy je crois devoir expliquer sainement la chose et attendre à vous renvoier ce livre mercredi prochain en 8 jours, afin que si dans l'intervalle vous pouviez m'avoir du libraire la table imprimée du barometre seulement, et me l'envoier je pusse me dispenser de la copier, et si vous ne le pouvez pas faire, il me reste le tems de faire moi meme cette copie.

Je serais curieux, Monsieur, d'avoir une explication de vous 1° sur le titre du livre, *Acta Helvetica*, qui me paroit supposer que votre Academie ou Université a le droit de s'enoncer au nom de toute la Suisse ce que j'ai de la peine à croire et que je ne vois point d'ailleurs soutenu par des dissertations inserées dans ce 1er tome de la part d'aucun Docteur de Zurich ny de Berne ny d'aucun autre canton ou Ville libre du corps helvetique.

Leipsik n'est pas moins je crois une université que votre ville, cependant ils s'y sont contentez du titre d'*Actes de Leipzich* dans ceux

qu'ils ont mis au jour jusques à present. Pourquoi donc ne pas les imiter à Bale en semblable cas.

2° La table en question porte pour titre: *Table des hauteurs des Montagnes du Perou par l'abaissement du Mercure dans le Barometre par Mr. Bouguer* et cependant on n'y voit pas une seule hauteur de montagne qui y soit nommée, n'y meme que l'on puisse deviner, et l'on voit d'ailleurs que ce n'est autre chose qu'une table de progression de la marche du barometre suivant les diverses hauteurs.

Je suis bien eloigné d'ailleurs Monsieur, d'applaudir aux eloges que Mr Bernoulli donne en cette occasion à Mr Bouguer, car je suis bien persuadé que Mr Bouguer sait bien dans sa conscience que tout cet ouvrage barometrique a été mal fait et ne peut etre par consequent que fort incertain. En faut-il d'autre preuve que celle qu'il en donne lui-meme en ne le publiant pas de son chef? y a-t-il du mysterieux en semblable cas qui puisse autoriser la non-publication.

Je suis persuadé que Mr Bouguer et les autres de sa compagnie ont emploié vingt fois plus de tems pour calculer peut-etre en vain cette table, qu'il ne leur en auroit falu pour faire les operations necessaires pour la bien fonder.

1° Ils n'etoient point pourvus de bons barometres, et ils n'en avoient pas la vingtainquieme partie de ce qu'il leur en faloit, pour faire comme il faut les observations, car ils en avoient tout au plus entr'eux tous, deux ou trois qui ne s'accordoient point ainsy qu'il est clair par la relation des Espagnols.

2° Ils n'ont point suivi les observations *gradatine* comme il le faloit depuis le bord de la mer jusqu'à Caraburu, l'un des points de leur base, et le fondement de leurs mesures geometriques en hauteur, car disent les Espagnols pag. 108, si nous provenons à determiner la hauteur du terrain où nous mesurames la meridienne au dessus de la superficie de la mer à 100 toises près c'est plus qu'il ne nous faut.

En effet 100 toises d'erreur de plus ou de moins en ce cas se trouvoient un rien pour la reduction des triangles à leur juste valeur, mais fesoient un objet de grande importance pour la question dont il s'agit, car il peut y avoir 200 toises d'erreur comme 100 sur l'elevation ou l'abaissement de ce fondement au dessus du niveau de la mer puisqu'ils ne l'ont mesurée ny par le barometre, ny par la geometrie, mais seulemt conclüe en vertu d'une progression imaginaire, savoir si elle etoit arithmetique ou geometrique et qu'elle ne peut pas tres bien etre ny l'un ny l'autre.

Nachtrag zu „Haller redivivus" von H. Kronecker.

Unserem ausgezeichneten Literarhistoriker, Herrn Prof. Dr. Walzel verdanke ich die Belehrung, dass Goethe im Jahre 1782 die auf Seite 209 und 210 angeführte Stelle aus Faust noch nicht gedichtet hatte.

Es wäre also eher anzunehmen, dass Goethe Schillers Ausspruch habe entwerten wollen.

Inhalts-Verzeichnis.

	Seite der Sitzungs-Berichte	Seite der Abhandlungen
Jahresbericht	II	
Jahresrechnung pro 1901	XV	
Mitgliederverzeichnis	X	
Bohren, A., Dr. phil., Lehrer auf der Rütti.		
Über das Airysche Integral		236
Brückner, E., Prof. Dr.,		
Die Beziehung zwischen Schichtung und Bänderung der Gletscher	VII	
Zur Entstehung des schweiz. Jura und seiner heutigen Formen	XI	
Epstein, L.,		
Wanderungen durch den Tiergarten . . .	V	
Fischer, E., Prof. Dr.,		
Demonstration von zwei mit Basidiosporen von Melampsorella Caryophyllacearum infizierte Weisstannen	VIII	
Graf, J. H., Prof. Dr.,		
Die Ueberschwemmungen des Seelandes und die Korrektionsversuche an der Aare und Sihl, im achtzehnten Jahrhundert	VII	240
Daniel Hubers trigonometrische Vermessung des Kantons Basel (1813—1824), mit Porträt und Dreiecks-Netz		1
Notizen zur Geschichte der Mathematik und der Naturwissenschaft in der Schweiz . . .		245
Krebs, A., Dr. phil., Seminarlehrer.		
Konstruktion gleichschenkliger Dreiecke mit Hilfe von Kurven höherer Ordnung (mit Tafeln) . .		80
Gross, Dr. med. in Neuenstadt,		
Ueber prähistorische Verhältnisse der Petersinsel	VII	
Gruner, P., Dr. phil., Gymnasiallehrer und Dozent,		
Ueber neue Sterne	VII	
Heffter, A., Prof. Dr.		
Demonstration einiger Pfeilgifte	VIII	

	Seite der Sitzungsberichte	Seite der Abhandlungen
Kissling, E., Dr. phil., Sekundarlehrer und Dozent,		
Demonstration einer Flügeldecke einer Rhina aus der Molasse der Baichlen	V	
Mitteilung über einen Fund von Murmeltierskeletten	V	
König, E., Dr. phil., Gymnasiallehrer und Dozent,		
Die Umformung von Wechselstrom in Gleichstrom	VI	
Elektrische Strom- und Spannungsresonanz . .	VIII	
Beiträge zu dem Problem der elektrochemischen Umformung von Wechselstrom in Gleichstrom durch Aluminium-Elektrolyt-Zellen (Figuren im Text) .		173
Kronecker, H., Dr. Prof.,		
Albrecht von Hallers physiologische Prioritäten .	VI	
Haller Redivivus (Figuren im Text) . . .		203
Nachtrag dazu		254
Pflüger, E., Dr. Prof.,		
Vergleichende Anatomie des Säugetierauges . .	VI	
Sidler, G., Dr. Prof.,		
Zur Theorie des Kreises u. a.		227
Studer, Th., Dr. phil. Prof.,		
Die Rasse der St. Bernhardshunde	V	
Faunistisches von der Petersinsel	VII	
Ueber eine noch jetzt lebende Urform des Pferdes .	VIII	
Tschirch, A., Dr. phil. Prof.,		
Demonstration einiger Ex libris von A. von Haller .	VI	

Verlag von K. J. WYSS in Bern.

(Fortsetzung von Seite 2 des Umschlags.)

Fascikel IV 6: *Fauna helvetica.* Heft 6: Mollusken. Zusammengestellt von Prof. Dr. Th. Studer, Dr. G. Amstein und Dr. A. Brot. Preis 60 Cts.

Fascikel IV 6: *Fauna helvetica.* Heft 9: Crustacea. Von Dr. J. Heuscher etc. 35 Seiten 8°. Preis Fr. 1.—

Fascikel V 4: *Heraldik und Genealogie.* Bearbeitet von Jean Grellet und Maurice Tripet. Bern 1895. 68 Seiten 8°. Preis Fr. 1.50.

Fascikel V 6 a–c: *Architektur, Plastik, Malerei.* Zusammengestellt von Dr. B. Haendcke. Bern 1892. 100 Seiten 8°. Preis Fr. 2.—

Fascikel V 6 e: *Leibesübungen.* Turnen, Fechten, Reiten, Wassersport etc. Zusammengestellt von Alois Landtwing. 165 Seiten 8°. Preis Fr. 3.—

Fascikel V 9 a b: *Landwirthschaft.* Zusammengestellt v. Prof. F. Anderegg u. Dr. E. Anderegg. Bern 1893. Heft 1—3. 258 S. 8° à Fr. 3.—
id. „ 4 „ —.60
id. „ 5 und 6 „ 2.—

Fascikel V 9 c: *Forstwesen, Jagd und Fischerei.* Forstwesen. Zusammengestellt durch das eidgen. Oberforstinspektorat. Bern 1894, 160 Seiten 8°. Preis Fr. 2.—

Fascikel V 9 c: *Forstwesen, Jagd und Fischerei.* Jagd. Zusammengestellt durch das eidgen. Oberforstinspektorat. 77 Seiten 8°. Preis Fr. 1.50

Fascikel V 9 c: *Forstwesen, Jagd und Fischerei.* Fischerei. Zusammengestellt durch das eidgen. Oberforstinspektorat. Bern 1898, 65 Seiten 8°. Preis Fr. 1.50

Fascikel V 9 d: *Schutzbauten.* Zusammengestellt durch das eidgen. Oberforstinspektorat. Bern 1895. 136 Seiten 8°. Preis Fr. 2.—

Fascikel V 9 g β: *Mass und Gewicht.* Bearbeitet von F. Ris, Direktor der eidgen. Eichstätte. Bern 1894. 36 Seiten 8°. Preis Fr. 1.—

Fascikel V 9 g γ: *Post- und Telegraphenwesen.*
Postwesen. Zusammengestellt von der Schweizer. Oberpost-Direktion.
Telegraphenwesen. Zusammengestellt von E. Abrezol, Inspektor der Central-Telegraphenverwaltung. Bern 1895. 113 Seiten 8°. Preis Fr. 2.—

Fascikel V 9 g ε: *Bankwesen, Handelsstatistik, Versicherungswesen.* Zusammengestellt von W. Speiser, Basel, Dr. Geering und Dr. J. J. Kummer. Bern 1893. 207 Seiten 8°. Preis Fr. 3.—

Fascikel V 9 b β: *Schweizerische Eisenbahn-Litteratur 1830-1901.* Mit Anhang: Verzeichniss der in der Eisenbahn-Aktensammlung (Bd. 1-8, neue Folge Bd. 1-15) abgedruckten Aktenstücke 1850-1899. Bearbeitet von Carl Sichler. Bern 1902. 539 Seiten. Preis Fr. 5.—

Fascikel V 9 j: *Alkohol und Alkoholismus.* Zusammengestellt von Otto Lauterburg, Pfarrer in Neuenegg, E. W. Milliet. Direktor der eidgen. Alkoholverwaltung, und Antony Rochat, Pfarrer in Satigny. Bern 1895. 183 Seiten 8°. Preis Fr. 2.—

Fascikel V 10 e γ: *Die christkatholische Litteratur der Schweiz.* Zusammengestellt v. Dr. F. Lauchert. Bern 1893. 32 Seiten 8°. 60 Cts.

Fascikel V 10 e α; *Bibliographie der evangelisch-reformirten Kirche in der Schweiz.* Heft 1: Die deutschen Kantone. Zusammengestellt von Dr. G. Finsler. Preis Fr. 2.—

Fascikel V 10 e: *Die katholisch-theologische und kirchliche Litteratur des Bisthums Basel* vom Jahre 1750 bis zum Jahre 1893. Zusammengestellt von Pfr. Ludwig R. Schmidlin in Biberist.
Heft 1 und 2 à Fr. 3.—

Verlag von K. J. WYSS in Bern.

Beiträge zur Kryptogamenflora der Schweiz.

I. Band. Heft I: *Entwicklungsgeschichtliche Untersuchungen über Rostpilze.* Von Prof. Dr. Ed. Fischer Fr. 4. —

I. Band. Heft II: *Die Farnkräuter der Schweiz.* Von Dr. Hermann Christ . . . . . Fr. 4. —

I. Band. Heft III: *Algues vertes de la Suisse. Pleurococcoïdes-Chroolépoïdes.* Par E. Chodat . . Fr. 10. —

Graf, J. H., Prof., Dr. *Einleitung in die Theorie der Gammafunktion und der Euler'schen Integrale.* Fr. 2. —

— —. *Geschichte der Mathematik und der Naturwissenschaften in bernischen Landen* vom Wiederaufblühen der Wissenschaften bis in die neuere Zeit. Heft 1—3. Fr. 7. 20

— — *Leben und Wirken des Physikers und Geodäten Jacques Barthélmy Micheli du Crest* aus Genf, Staatsgefangener des alten Bern 1746—1766. Mit Porträt Micheli's, einer Ansicht seines Gefängnisses in Aarburg und Facsimile seines Panorama der Alpen Fr. 3. —

— — *Das Leben und Wirken des Physikers und Astronomen Joh. Jac. Huber* aus Basel, 1733—1798. Mit dem Bildnisse Huber's und einer Tafel, seine freie Uhrhemmung darstellend . . . . . Fr. 1. —

— — *Professor Dr. Rudolf Wolf, 1816—1893* » 1. —

— — *Professor Ludwig Schläfli. 1814—1895* . » 1. 20

— — *Der Briefwechsel zwischen Jakob Steiner und Ludwig Schläfli* . . . . . Fr. 3. —

— — *Die Exhumierung Jakob Steiner's* und Einweihung des Grabdenkmals Ludwig Schläfli's anlässlich des 100. Geburtstages Steiner's. Mit 2 Lichtdrucken Fr. 1. —

— — *Der Mathematiker Jakob Steiner von Utzenstorf.* Ein Lebensbild und zugleich eine Würdigung seiner Leistungen . . . . . Fr. 1. 50

— — *Wann beginnt das XX. Jahrhundert?* Vortrag. Fr. —. 50

Graf J. H., Prof. Dr. und **Gubler Ed., Dr.** *Einleitung in die Theorie der Bessel'schen Funktionen.* 2 Hefte: Die Bessel'schen Funktionen erster und zweiter Art . . . . . à Fr. 4. —

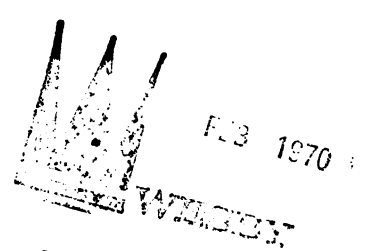
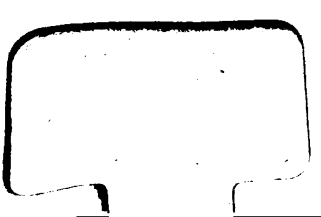
Huber, G., Prof. Dr. *Sternschnuppen, Feuerkugeln. Meteorite und Meteorschwärme* . . . . . Fr. 1. —

— — *Forschungen auf dem Gebiete der Spektralanalyse* —. 80

— — *Die kleinen Planeten des Asteroidenringes* . —. 60

Fischer, Prof., L., *Zweiter Nachtrag z. Verzeichnis der Gefässpflanzen des Berner-Oberlandes, mit Berücksichtigung der Standortsverhältnisse, der horizontalen und vertikalen Verbreitung* . . . . Fr. —. 25

Durch jede Buchhandlung zu beziehen.


FEB 1970